Федеральное агентство по образованию
Дальневосточный государственный технический университет
(ДВПИ им. Куйбышева)

Н.А. ЮКАЕВА

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ В МЕНЕДЖМЕНТЕ

Учебное пособие

Рекомендовано Дальневосточным региональным
учебно-методическим центром в качестве учебного пособия
для студентов вузов региона

Владивосток 2010

Настоящее пособие предназначено для слушателей Президентской программы, студентов второго высшего образования, обучающихся по специальности “Экономика и управление на предприятии”, а так же для студентов всех специальностей, изучающих предметы “Исследование операций”, “Математические методы в экономике” и др.

В пособии, в кратком изложении, содержатся основные сведения о методах математики, которые можно применять для численного решения задач экономики.

Рассмотрены методы линейной оптимизации, количественные методы управления запасами и методы управления проектами. Для анализа примеров использованы электронные таблицы MS-Excel. При рассмотрении темы управления проектами привлекается MS-Project. Изложение основано на рассмотрении реалистичных управленческих ситуаций, их формализации, оптимизации и анализе с использованием компьютерных методов.

Количественные методы в менеджменте

Предисловие

Курс “Количественные методы в менеджменте” – обязательная часть программы профессиональной подготовки и переподготовки современных управленцев. В нём рассматриваются модели и методы оптимизации управления и принятия решений. Основой курса является раздел математики “Исследование операций”. Все эти модели и методы возникли как ответ науки на заказ от бизнеса, поэтому распространены на практике.

Оптимальные планы производства, продаж, закупок, перевозок, планирование, управление запасами и проектами, организация работы и оценка эффективности систем массового обслуживания – основные задачи, каждодневно решаемые компаниями, не важно, работают ли они в сфере производства, торговли или в сфере услуг.

Количественные методы позволяют просчитать последствия выбора различных альтернатив решения и выбрать наилучшую альтернативу, т.е. количественные методы применяются в менеджменте для повышения эффективности управления.

Основная задача курса “Количественные методы в бизнесе” состоит в том, чтобы подготовить менеджеров к использованию методов для принятия эффективных управленческих решений.

Цели курса “Количественные методы в бизнесе” в программах MBA научить специалистов правильно применять готовые компьютерные программы, разработанную технику анализа количественных моделей управления для принятия эффективных управленческих решений. При этом специалист должен уметь построить модель, определить её входные и выходные параметры, а также провести анализ результатов и принятия лучшего решения.

Для реализации отмеченных целей, в основу преподавания курса положены: а) анализ практических управленческих проблем и ситуаций (кейсов); б) необходимость решать поставленные задачи и анализировать их результаты, т.е. проводить анализ чувствительности решения к изменениям входных параметров задачи. Для более эффективного анализа примеров предлагается использовать программу электронных таблиц MS-Excel с несколькими дополнительными надстройками к ней и MS Project. Весь материал курса разбит на пять частей.

Часть первая. “Оптимизация в условиях полной определённости”. Методы линейной оптимизации.

Часть вторая. Транспортные задачи и логистика. Задачи о назначениях и отборе.

Часть третья. Сетевые модели, оптимизация на графах и сетях. Планирование и анализ проектов.

Часть четвёртая. Теория игр. Методы принятий решения в условиях неопределённости и риска.

Часть пятая. Оптимальное управление запасами.

Часть I

Оптимизация в условиях полной определённости

1.1. Метод линейной оптимизации

В этой части рассмотрены теория и примеры использования количественных методов и моделей, цель которых – найти оптимальную стратегию управления в условиях, когда все параметры и правила управления системой чётко определены и не подвержены никаким случайным воздействиям. В таких задачах используется метод линейной оптимизации, цель которого – составление оптимальных планов производства, продаж, закупок, перевозок, оптимальное финансовое планирование, оптимальная организация рекламных кампаний и др. Планирование – одна из основных функций менеджмента.

Примеры ЗЛО. *1). Оптимальный производственный план*. Пусть предприятие может производить несколько видов продукции A_1, A_2,…, A_n. Для производства каждого вида из них, требуется разное количество одних и тех же ресурсов B_1, B_2,…, B_n (материалы, электроэнергия, рабочая сила и т. д.). Продажа одного изделия каждого типа приносит определенную прибыль c_1, c_2,…,c_n. Так как из имеющихся на предприятии ресурсов можно ежедневно производить различное количество изделий, то и прибыль будет неодинаковой. Отсюда, может существовать множество различных производственных планов, каждому из которых соответствует определенное значение прибыли P и определенный расход каждого ресурса, который в свою очередь может быть ограниченным. В задаче требуется найти такой вариант производственного плана, при котором прибыль была бы максимальной.

2). Организация транспортных перевозок. Пусть имеется сеть оптовых баз A_1,A_2,…,A_m, с которых однотипная продукция может доставляться потребителям в магазины B_1,B_2,…,B_n. Продукцию можно привезти с любой базы A_i в любой магазин B_j. Стоимость перевозки единицы груза разная, она известна и для любой пары $A_i \rightarrow B_j$ равна c_{ij}. Ясно, что лучше выбирать такие пары (база-магазин), для которых эта стоимость наименьшая. Запасы продукции на базах, а также потребности магазинов ограничены. В задаче требуется составить план перевозок $\{X_{ij}\}$, чтобы суммарные транспортные расходы P были наименьшими, а также удовлетворены все требования потребителей, а груз, имеющийся на базах, весь вывезен.

3). Выбор инвестиционных проектов. Инвестиционный отдел банка рассматривает множество возможных проектов вложения денег на следующий год J_1, J_2, …, J_n. Каждый проект в конце года должен принести определенную прибыль P_1, P_2,…, P_n. Для каждого проекта определен количественный индекс надежности r_1, r_2,…,r_n. Каждый проект J_i в течение года требует определенное ежемесячное финансирование a, a,…,a. Банк рассчитывает, что его денежные поступления в следующем году составят S_1, S_2,…, S_{12} д.ед. Какие проекты выбрать, а какие отвергнуть, чтобы планируемого притока наличности хватило для финансирования отобранных проектов?

4). Реклама и маркетинг. Рекламная компания хочет, чтобы её рекламные объявления достигли, по крайней мере, 1 млн. человек. Она планирует провести рекламу через местное TV, радио, почту, газеты и электронную почту. Известна маркетинговая оценка эффективности рекламы в различных каналах, данные о количестве объектов, размещения рекламы, средней аудитории, охватывающей данные СМИ и цены на рекламную акцию. Компанию интересует минимальная стоимость рекламы, а также, сколько денег следует вложить в каждый канал.

Можно привести еще ряд примеров, но все они имеют некоторые общие черты, их можно объединить по составлению математической модели.

Область исследования операций, которая занимается оптимизацией, называется *математическим программированием*. Теоретической основой линейной оптимизации (ЛО) является линейное программирование, которое является одной из составляющих математического программирования. Модели линейного программирования очень важны, так как много задач в самых разных сферах деятельности, которые могут быть проанализированы с помощью моделей линейного программирования. Существуют эффективные и универсальные алгоритмы решения ЗЛП, реализованные на ЭВМ, а также, методы анализа моделей ЛП позволяют исследовать модель на чувствительность при изменении её параметров.

Постановка ЗЛО. При построении математической модели задачи линейной оптимизации, прежде всего, необходимо определить количественную характеристику цели, которой надо достичь в процессе оптимизации, - *целевую функцию*. Это может быть максимальная прибыль или минимальные издержки (в денежном, временном или в каком-либо другом выражении). Целевая функция показывает, почему одно рассматриваемое решение лучше или хуже другого. Целевая функция зависит от величин, называемых *переменными решения* (*неизвестными*), которые можно изменять, разыскивая оптимальное решение.

Цель оптимизации – найти такие значения переменных решения, при которых целевая функция достигает максимума или минимума.

Любая оптимизация всегда проводится при наличии некоторых *ограничений* – условий, ограничивающих изменение переменных решения. Эти ограничения могут диктоваться:

а) вторичными целями (например, рассматривая задачу о минимизации рисков инвестиционного портфеля, мы, одновременно, хотим добиться ожидаемой прибыли);

б) ограниченностью ресурсов, находящихся в распоряжении (денежных, временных, материальных и др.);

в) установленными “правилами игры” (рыночные ограничения, нормативные акты, любые требования субъекта, принимающего решения и т.д.)

Любой набор переменных решения, удовлетворяющих ограничениям, называют *допустимым решением* (или *допустимым планом*). Таких планов может быть множество. Допустимое решение, которое отвечает наибольшему или наименьшему значению целевой функции, называется *оптимальным решением*. Обычно это решение одно, но встречаются модели, когда одному оптимальному плану соответствует множество допустимых решений.

Линейная оптимизация имеет дело с моделями, в которых целевая функция линейно зависит от переменных решения, ограничения также представляют собой линейные уравнения или неравенства.

В линейных моделях, кроме неизвестных, присутствуют постоянные числа, их называют *параметрами*. Параметры модели (например, тарифы перевозок) определяют вид и значение целевой функции, оптимальное решение также зависит от параметров модели, т.е. если их изменить, изменится и оптимальное решение. Это очень важно, потому что, изменяя параметры, можно что-то менять в управляемой системе. Но в ходе поиска оптимального решения параметры считают неизменными. После его определения, параметры можно изменить и найти новое оптимальное решение. Методы анализа модели ЛО не только позволяют получить оптимальное решение, но и дают информацию о том, как может изменяться это решение при изменении параметров модели, т.е. есть возможность получить ответы на вопросы типа “что, если”, а это очень важно для лица, принимающего решение.

Для решения задач ЛО можно использовать надстройку к программе электронных таблиц MS Excel, которая называется **“Поиск решения”**.

Как было уже сказано, теоретической основой задач линейной оптимизации, является линейное программирование. Модели линейного программирования очень важны, так как много задач в самых разных сферах деятельности, которые могут быть проанализированы с помощью моделей линейного программирования. Существуют эффективные и универсальные алгоритмы решения ЗЛП, реализованные на ЭВМ, а также, методы анализа моделей ЛП позволяют исследовать модель на чувствительность при изменении её параметров.

Математическая модель ЗЛО. Рассмотрим “Линейную модель оптимального планирования”.

Мини-кейс : “Оптимальный план производства”.

<u>*Задача №1.1*</u> *“Оптимальный план выпуска продукции мебельного цеха”*

Цех может выпускать два вида продукции: шкафы и тумбы для телевизора. На каждый шкаф расходуется 3,5м стандартных ДСП, 1м листового стекла, и 1 человека-день трудозатрат. На тумбу расходуется 1м ДСП, 2м стекла, и 1 человеко-день трудозатрат. Прибыль от продажи 1 шкафа составляет 200у.е., а 1 тумба – 100у.е. Материальные и трудовые ресурсы ограничены: в цехе работают 150 рабочих, запасы ДСП на день составляют 350м, а стекла – 240м. Какое количество шкафов и тумб должен выпустить цех, чтобы получить максимальную прибыль? Оформим данные задачи в виде таблицы 1.1.

Таблица 1.1. Параметры задачи №1.1

Ресурсы	Шкаф	Тумба	**Запасы**
ДСП	3,5	1	350
Стекло	1	2	240
Труд	1	1	150

Прибы ль	200	10 0	

Решение. 1) Прежде всего определим цель задачи и вид целевой функции. В данном случае мы хотим максимизировать прибыль, следовательно, целевая функция должна вычислять полную прибыль. В задаче задана прибыль, которую приносит каждый вид произведённой мебели. Поэтому полная прибыль P будет определяться этой прибылью и количеством произведённой мебели каждого вида. Пусть X и Y – соответственно количество шкафов и тумб, выпускаемых цехом. Прибыль от продажи одного шкафа равна 200у.е., значит, прибыль от продажи X шкафов будет 200·X. Аналогично прибыль от продажи Y тумб равна 100·Y. Общая прибыль от продажи шкафов и тумб будет равна P=200X+100Y. Глядя на выражение целевой функции, можно легко увидеть, что, чем больше будут значения X и Y, тем больше будет прибыль P. Но увеличивать беспредельно ежедневный выпуск шкафов и тумб невозможно, так как ресурсы ограничены.

2. На этом этапе надо выяснить, при каких ограничениях надо найти максимальную прибыль. Запишем эти ограничения. Начнем с трудовых ресурсов. Поскольку каждый рабочий за 1 день может сделать либо 1 шкаф, либо 1 тумбу, ясно, что общее количество выпущенных изделий не должно превышать числа рабочих в цехе. То есть, общий расход труда на X шкафов и Y тумб, будет $1\cdot X+1\cdot Y\leq 150$. Аналогично записывается неравенство, отражающее ограниченность ежедневных запасов ДСП. Поскольку на 1 шкаф расходуется 3,5м ДСП, а на тумбу – 1м, то суммарный расход ДСП будет $3{,}5\cdot X+Y$, что не должно превышать ежедневного запаса ДСП в цехе, т.е. 350м. Получим неравенство $3{,}5\cdot X+Y\leq 350$. Рассуждая точно также относительно третьего ресурса – стекла, получим ограничение $1\cdot X+2\cdot Y\leq 240$. Осталось добавить, что переменные решения не могут быть отрицательными, $X\geq 0, Y\geq 0$.

Получим математическую модель ЗЛО или ЗЛП.

Найти max $P=200\cdot X+100\cdot Y$, при ограничениях:

$$\begin{cases} 3{,}5X+Y\leq 350, \\ X+2Y\leq 240, \\ X+Y\leq 150, \\ X\geq 0, Y\geq 0. \end{cases}$$

Определение переменных решения, целевой функции и ограничений – это почти все, что должен сделать менеджер, чтобы воспользоваться результатами оптимизации и анализа линейной модели. Дальше необходимо только правильно организовать данные для компьютера на листе MS Excel и запустить задачу на решение.

При организации данных ЗЛП на листе MS-Excel следует отвести отдельные ячейки для параметров, переменных, целевой функции и левых частей ограничений. Ячейки для переменных можно оставить пустыми или ввести в них любые допустимые значения переменных, а в ячейки для целевой функции и ограничений ввести формулы, отражающие их функциональную зависимость от переменных и параметров.

Требование линейности означает, что и целевая функция, и ограничения могут представлять собой только суммы произведений коэффициентов на переменные решения. В MS-Excel имеется стандартная математическая функция СУММПРОИЗВ (или SUMPRODUCT), позволяющая быстро вычислять такие суммы произведений. Далее на листе MS-Excel надо сделать все необходимые расчёты для задания ограничений. Когда будем иметь всю информацию, необходимую надстройке “**Поиск решения**”, приступаем к решению.

Алгоритм решения задачи ЛП с помощью MS-Excel

1. Организовать данные на листе MS-Excel: а) ввести целевую функцию P=200X+100Y; б) ввести формулы, отражающие расход ресурсов.

Для этого надо:

2. Выбрать пункт меню **“Сервис” (Tools**), внутри найти пункт **“Поиск решения” (Solver**). В появившемся диалоговом окне следует задать параметры поиска, а именно: **а)** в окошке “**Установить целевую ячейку”** указать ячейку, содержащую целевую функцию; **б)** установить переключатель на отметке “**Равной максимальному значению**”; **в)** в поле окна **“Изменяя ячейки”** указать ячейки, соответствующие переменным решения; **г)** щелкая по кнопке **“Добавить**”, ввести ограничения в окне **“Добавление ограничения”.**

3. Щелкнуть по кнопке **“Параметры**”, в появившемся окне **“Параметры поиска решения**” установить **“Линейная модель**”. Вернуться к окну **“Поиск решения”.**

4. Щелкнуть по кнопке **“Выполнить**”. Оптимизационная программа MS Excel выполнит поиск решения, после чего появится окно **“Результаты поиска решения”**. Если все сделано правильно, программа сообщит: **“Решение найдено**. **Все ограничения и условия оптимальности выполнены”.**

5. В этом случае надо **“Сохранить найденное решение”.**

В случае если программа не может найти решения, надо вернуться в положение **“Восстановить исходные данные”** и проверить организацию данных на листе Excel.

Организация данных задачи об оптимальном плане производства мебельного цеха с помощью MS-Excel смотрите в таблице 1.2.

Таблица 1.2. Организация данных задачи №1.1 на листе MS Excel

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
1	**Оптимальный план производства мебельного цеха**						
2							
3		Параметры					
4	Ресурсы	Запасы	Продукты				
5			**Ш**	**Т**			
6	**ДСП**	350	3,5	1			
7	**Стекло**	240	1	2			
8	**Труд**	150	1	1			
9	Прибыль		200	100			
11			X1	X2	Расход		

12	Переменные		0	0	ДСП	=$C$12*C6+$D$12*D6	
13					Стекло	=$C$12*C7+$D$12*D7	
14					Труд	=$C$12*C8+$D$12*D8	
15		Целевая функция					
16	P=	=C12*C9+D12*D9					

Решение задачи определения оптимального плана мебельного цеха в табл. 1.3.

Таблица 1.3. Результаты решения примера №1.1 на листе MS Excel

	A	B	C	D	E	F
1	**Оптимальный план производства мебельного цеха**					
2						
3		Параметры				
4	Ресурсы	Запасы	Продукты			
5			**Ш**	**Т**		
6	**ДСП**	350	3,5	1		
7	**Стекло**	240	1	2		
8	**Труд**	150	1	1		
9	Прибыль		200	100		
11			X1	X2	Расход	
12	Переменные		80	70	ДСП	350
13					Стекло	220
14					Труд	150
15		Целевая функция				
16	P=	23000				

В случае если оптимизационная программа не может найти решение, в окне появится сообщения: “Значения целевой ячейки не сходятся” или “Поиск не может найти решения”, или “Условия линейной модели не выполняется”. В этом случае надо переставить переключатель в окне “Результаты поиска решения” в положение “Восстановить исходные данные”, щёлкнуть по кнопке Ok и проверить организацию данных на листе Excel и в установках окна “Поиск решения”. Возможно, неверно задан знак ограничений, или неверно введены формулы для целевой функции и ограничений.

Графическое решение задачи “об оптимальном плане выпуска продукции мебельного цеха”

В задаче требовалось найти максимум целевой функции:

$$P=200x_1+100x_2, \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3{,}5x_1 + x_2 \le 350, \\ x_1 + 2x_2 \le 240, \\ x_1 + x_2 \le 150, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Алгоритм решения задачи. 1) Строим область допустимых решений задачи, определяемую системой неравенств (1.2). Для этого построим линии, изображающие предельные расходы ресурсов за день: $3{,}5x_1+x_2=350$, $x_1+2x_2=240$, $x_1+x_2=150$.

Получим многоугольник решений ОАВС, имеющий конечное число угловых точек (рис.1.1).

2) Строим одну из линий уровня, соответствующую целевой функции (1), проходящую через т. О (так называемую линию постоянной прибыли).

$$200x_1+100x_2=0. \qquad (1.3)$$

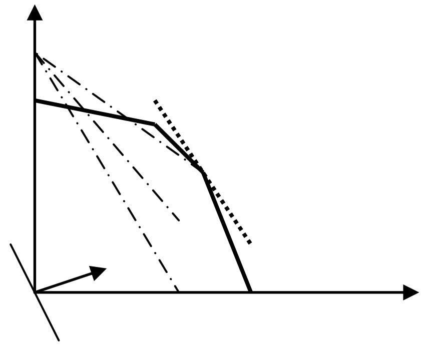


Рис.1.1.

3) Находим вектор-градиент функции (1), $\vec{p}(\frac{\partial p}{\partial x_1},\frac{\partial p}{\partial x_2}) = (200;100)$.

По своим свойствам, вектор-градиент указывает в сторону роста целевой функции и перпендикулярен к линии уровня (1.3).

4) Строим линию наивысшего уровня целевой функции, для этого перемещаем линию (3) в направлении вектора $\vec{p}$ через многоугольник решений.

Теоремы ЛП утверждают: если ЗЛП имеет оптимальное решение, оно достигается в одной из угловых точек области допустимых планов. Эта точка является пересечением границ тех ресурсов, которые при оптимальном плане расходуются полностью. Т.е. максимальное значение целевая функция принимает в последней угловой точке при выходе из области (1.2). Исключение из этого правила составляют случаи, когда линии уровня параллельны одной из границ области допустимых планов. В таких случаях существует бесконечное множество планов, отвечающих оптимальному значению целевой функции.

5) Находим координаты этой точки и вычисляем значение в ней целевой функции. У нас максимальное значение целевой функции достигается в т. С, координаты которой находим из системы $\begin{cases} 3{,}5x_1 + x_2 = 350, \\ x_1 + x_2 = 150 \end{cases}$, получим С(80;70).

P (max)=200·80+100·70=23000(у.е.)

1.2. Анализ оптимального решения задачи линейного программирования

Хотя сам оптимальный план очень полезен, часто бывает интересно знать, как можно изменить те или иные параметры системы (до этого постоянные), чтобы улучшить решение, получить еще большую прибыль или уменьшить издержки. Значение параметров определяет оптимальное значение переменных и целевой функции. С целью улучшения решения многие параметры могут быть изменены. В наших примерах трудно поменять параметры, характеризующие технологический процесс, но изменить количество ресурсов (запасы), а также отпускные цены на товары вполне возможно. Обычно это связывают с привлечением дополнительных финансовых ресурсов, при этом необходимо ответить на ряд вопросов:

- какой ресурс наиболее сильно влияет на изменение прибыли (издержек)?
- как изменится решение и целевая функция при изменении количества того или иного ресурса?
- если какой-либо продукт не входит в оптимальный план, а по каким-то причинам желательно, чтобы он в него входил, то какой параметр, и в каком направлении следует изменить?
- как повлияет на оптимальный план изменение цен на товары, и можно ли бесконтрольно увеличивать цены? и т.д.

Поиск ответов на подобные вопросы и составляет сущность анализа решения. В задачах ЛП существенную информацию о влиянии изменений параметров можно получить из *"отчета об устойчивости"* в ходе поиска решения в MS-Excel. Для ответа на другие вопросы типа "что, если" необходимо дополнительное исследование. Некоторое представление о том, как может меняться решение ЗЛП при изменении параметров, можно получить из анализа графического решения задачи.

I. Изменение оптимального решения при изменении целевых коэффициентов

В задаче №1.1 целевая функция имеет вид: $P=200x_1+100x_2$.

Если уменьшить цену шкафа от 200у.е. до 150у.е. и далее до 50у.е., линия уровня будет менять наклон. Проведем линию уровня 200х+100х=10000, (1) на рис.1.1, а теперь 150х+100х=10000, (2) на рис.1.1. В этом случае т.С остается оптимальной. Изменим цену шкафа на 50у.е., оптимальной станет т.В(60;90).

Отсюда вывод: "существует определенный интервал устойчивости, в котором изменение целевых коэффициентов не приводит к изменению оптимального решения". Конечно, значение целевой функции в точке оптимума изменится (за счет коэффициентов). Но дальнейшее изменение коэффициентов целевой функции (цены) может привести к изменению оптимального решения и целевой функции. Т.е., если значение целевого коэффициента выходит за пределы интервала устойчивости, оптимальное значение резко изменится, перейдет в другую угловую точку области допустимых планов. В этом случае надо заново решать ЗЛП.

В нашей задаче, если $C_1=150$; $C_2=100$; $P=150\cdot80+100\cdot70=12700$.

Вывод: 1. Изменение коэффициентов целевой функции c_j не изменяют область допустимых решений. В этом случае изменяется вектор $\vec{p} = gradF(x)$ и направление линий уровня, изображающих целевую функцию.

1. До тех пор, пока изменение наклона вектора $\vec{p} = gradF(x)$ не превышает некоторых пределов, оптимальное решение задачи $\{x_j^*\}$ не меняется, значение самой целевой функции конечно изменится.

3. При выходе значений коэффициентов c_j за пределы устойчивости, решение задачи перемещается в другую угловую точку и может очень сильно измениться.

4. “Допустимое увеличение” и “Допустимое уменьшение” для каждого целевого коэффициента c_j, при котором оптимальное решение не изменится, приводится в табл.1.4 “Изменяемые ячейки” отчёта Excel об устойчивости. Как его получить, читайте ниже. При этом: а) если $x_j \geq 0$, т.е. товар входит в оптимальный план, имеется верхний и нижний пределы для изменения соответствующего j - того коэффициента целевой функции; б) если $x_j=0$, то ”Допустимое уменьшение” может быть как угодно велико (товар всё равно не войдёт в оптимальный план). Верхний предел “Допустимое увеличение” покажет, насколько надо увеличить c_j, чтобы j – тый продукт вошёл в оптимальный план. Величина, противоположная этому увеличению, называется *нормированной стоимостью* и показывает, насколько нынешняя цена товара ниже минимальной цены (или издержки выше максимальной), при которой этот товар может войти в оптимальный план. Если некоторый продукт не входит в оптимальный план, его нормированная стоимость <0, а её величина показывает, на сколько надо увеличить норму прибыли этого продукта, чтобы он вошёл в оптимальный план.

5. Пределы устойчивости для изменения c_j даются в отчёте при условии, что все остальные c_j ($k \neq j$) остаются неизменными. Одновременное изменение двух или более коэффициентов может привести к изменению оптимального плана. Для оценки влияния одновременного изменения нескольких c_j, надо вычислить относительное изменение $\frac{\Delta c_j}{\max \Delta c_j}$, где $\max \Delta c_j$ - это предел либо увеличения, либо уменьшения c_j, и вычислить сумму этих относительных изменений. Если сумма >1, оптимальное решение $\{x_j^*\}$ изменится, если <1 – нет.

В процессе поиска оптимального решения MS-Excel формирует *отчет об устойчивости*, в котором выдает интервал изменений коэффициентов целевой функции, внутри которого их изменения не приводит к изменению оптимального решения. Для получения этого отчета надо: найти оптимальное решение с помощью **“Поиска решения**”;

- в окне **”Результаты поиска решения”** нажать кнопку **”Отчет об устойчивости”** (табл. 1.4);

- в первой таблице отчета об устойчивости “**Изменяемые ячейки**” есть столбцы **“Целевой коэффициент**”, **“Допустимое увеличение**” и **“Допустимое уменьшение”**. В первом из них даны исходные значения целевых коэффициентов. Второй и третий столбцы содержат информацию об интервале устойчивости найденного оптимального решения;

- во второй таблице отчета об устойчивости **“Ограничения**” аналогичные интервалы устойчивости установлены для запасов ресурсов, смысл которых несколько иной. Чтобы его понять, рассмотрим двойственную задачу к задаче №1.

Таблица 1.4. Отчёт об устойчивости MS Excel для задачи №1.1

Отчёт об устойчивости						
Оптимальный план производства мебельного цеха						
Изменяемые ячейки						
Ячейка	Имя	Результат значение	Нормир. стоимость	Целевой коэффициент	Допустимое увеличение	Допустим. Уменьшен.
$C$12	Перемен.	**80**	0	200	150	100

$D$12	Перемен.	**70**	0	100	100	42,86
Ячейка	Имя	Результат значение	Теневая цена	Ограничение Правая часть	Допустимое увеличение	Допустим. Уменьшен.
$F$12	ДСП	350	**40**	350	175	50
$F$13	Стекло	220	**0**	240	1E+30	20
$F$14	Труд	150	**60**	150	8,333333	50

Дальнейшее исследование задачи ЛП связано с изменением запасов ресурсов, для этого необходимо знать их теневые цены. На эти вопросы даёт ответ теория двойственности ЗЛП.

Согласно теоремам ЛП, можно предложить, казалось бы, простой метод решения задачи: просто “перебрать” все угловые точки допустимых планов, в каждой из них вычислить значение целевой функции и выбрать ту угловую точку, где целевая функция оптимальна. Однако количество угловых точек области может быть большим и с ростом числа переменных неограниченно увеличиваться. Однако компьютер, используя надстройку “ Поиск решения” MS-Excel, решит такую задачу очень быстро, используя эффективные методы решения. Этот метод называется *“симплекс-метод”*. Он не перебирает все угловые точки допустимого множества, а, начав с любой из них, выбирает каждую последующую так, чтобы значение целевой функции в ней было ближе к оптимальному решению. Поэтому симплекс-метод называют методом последовательного улучшения плана.

Симплекс-метод реализуется в три этапа:

1. Нахождение первоначального базисного плана. Для этого определяют линейно - независимые столбцы матрицы, составленной из технологических параметров системы ограничений.

2. Нахождение допустимого базисного решения. С геометрической точки зрения, допустимое решение - это попадание в одну из вершин области допустимых планов, в этом случае все базисные переменные неотрицательные.

3. Нахождение оптимального базисного решения. Найденный допустимый базис проверяют на оптимальность. Для этого подключают целевую функцию и проверяют на ней критерии оптимальности.

1.3. Взаимно-двойственные задачи линейного программирования

Для любой задачи линейного программирования можно сформулировать *двойственную задачу*. Ее формулировка использует те же параметры, что и исходная задача. Исходная и двойственная задачи совершенно симметричны. Если двойственную задачу рассматривать как исходную, то исходная будет для нее двойственной.

Обе задачи обладают следующими свойствами:

1. В одной задаче ищут максимум линейной функции, в другой – минимум.

2. Коэффициенты при переменных в линейной функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений в другой.

3. В задаче максимизации система ограничений имеет все неравенства вида “$\leq$”, а в задаче минимизации – все неравенства вида “$\geq$”.

4. Матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений обеих задач транспонированные друг другу матрицы.

5. Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных в другой задаче.

6. В обеих задачах имеют место условия неотрицательности переменных.

Общий вид двойственной пары задач в табл.1.5.

Таблица 1.5. Соответствие прямой и двойственной задач ЛП

Исходная задача	Двойственная задача
$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$ при ограничениях: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$ и условии $x_j \ge 0,\ j = 1,2,...n.$	$G = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min$ при ограничениях: $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ ...., \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n \end{cases}$ и условии $y_i \ge 0, i = 1,2,..., m.$

Основные теоремы двойственности

Теорема 1. Если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая, причем оптимальные значения их линейных функций равны: $F_{max}=C_{min}$

Если линейная функция одной из задач не ограничена, то условия другой задачи противоречивы.

Теорема 2. Первоначальным переменным оптимального решения одной из взаимно двойственных задач соответствуют дополнительные переменные оптимального решения другой задачи (табл. 1.6).

Таблица 1.6. Связь между переменными двойственной пары задач ЛП

<table>
<tr><td colspan="2">Переменные исходной задачи</td></tr>
<tr><td>Первоначальные</td><td>Дополнительные</td></tr>
<tr><td>$\begin{matrix} x_1 & x_2 & & x_j & & x_n \\ \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \dots & \updownarrow \\ y_{m+1} & y_{m+2} & & y_{m+j} & & y_{m+n} \end{matrix}$</td><td>$\begin{matrix} x_{n+1} & x_{n+2} & & x_{n+j} & & x_{n+m} \\ \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \dots & \updownarrow \\ y_1 & y_2 & & y_j & & y_m \end{matrix}$</td></tr>
<tr><td>Дополнительные</td><td>Первоначальные</td></tr>
<tr><td colspan="2">Переменные двойственной задачи</td></tr>
</table>

Теорема 3. Переменные оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных линейной функции исходной задачи, выраженной через свободные переменные её оптимального решения.

Двойственная задача для задачи

"об оптимальном плане выпуска продукции мебельного цеха"

Задача №1.2. Пусть имеется покупатель на все ресурсы, используемые для выпуска продукции мебельного цеха (ДСП, стекло и труд). Таблица параметров та же, что и для исходной задачи (табл. 1.1). Какие цены на эти ресурсы надо назначить, чтобы продать их было выгоднее, чем производить продукцию? Какую минимальную сумму можно выручить от продажи ресурсов при этом условии?

Математическая модель задачи. Так как в задаче три вида ресурсов, то переменных решения тоже будет три. Это цены на ресурсы, которые назначает производитель при продаже: 1м ДСП стоит Y_1 у. е., 1м стекла – Y_2 у. е., 1 день труда рабочего – Y_3 у. е. Эти цены называют "объективно обусловленными оценками" или "теневыми ценами" (скрытыми доходами). Теневые цены характеризуют ценность ресурсов для производителя.

Целевая функция – это прибыль, которую получит продавец ресурсов, если продаст по этим ценам все имеющиеся ресурсы, т.е.:

$$C(Y) = 350y_1 + 240y_2 + 150y_3 .$$

Однако интерес покупателя в том, чтобы купить эти ресурсы как можно дешевле, т.е. целевую функцию можно рассматривать как издержки покупателя ресурсов, которые необходимо минимизировать, приняв во внимание интересы производителя – продавца ресурсов.

Цель производителя (продавца ресурсов) найти минимальное значение суммарной выручки от продажи всех ресурсов при условии, что продать их было бы не менее выгодно, чем производить из них продукцию.

При записи ограничений производитель использует тот же принцип: если он хочет продать 3,5 м ДСП, 1 м стекла и 1 день труда рабочего, то он должен получить не меньше, чем прибыль от производства одного шкафа:

$$3{,}5y_1 + y_2 + y_3 \geq 200,$$

аналогично для тумбы:

$$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 100 \text{, где } y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

Итак, получили задачу:

Найти $$\min C(Y) = 350y_1 + 240y_2 + 150y_3, \qquad (1.4)$$

при ограничениях: $$\begin{cases} 3{,}5y_1 + y_2 + y_3 \geq 0, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 0, \\ y_i \geq 0, i = 1,2,3. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Для проверки теорем теории двойственности можно решить двойственную задачу с помощью MS-Excel. Получим min C(Y)=23000 у.е., цены на ресурсы: y_1=40; y_2=0; y_3=60. Бросается в глаза нулевая цена второго ресурса – стекла. Это нулевое значение теневой цены стекла обусловлено тем обстоятельством, что при оптимальном плане выпуска продукции мебельного цеха (зад. №1.1) ежедневные запасы стекла избыточны, каждый день из 240 м стекла производитель использует только 220 м. Отсюда вывод: *"теневые цены"* в конкретной производственной ситуации характеризуют ценность ресурса для производителя". Рассматривая решения двойственной пары задач №1 и №2, можно проследить следующую экономическую связь между ними.

Экономическая интерпретация основных соотношений двойственности

1. Если решение исходной задачи на максимум существует, то решение двойственной задачи на минимум точно ему равно: $P_{\max} = C_{\min}$.

Теневые цены для двойственной задачи – это оптимальное решение x_j для прямой задачи.

2. Для оптимальных планов исходной и двойственной задач:

а) если
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad (1.6)$$

т.е. i – ресурс использован полностью при производстве продукции по оптимальному плану, то его теневая цена $y_i>0$.

б) Если
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i, \qquad (1.7)$$

т.е. i – ресурс не полностью использован при производстве продукции по оптимальному плану, то его теневая цена равна нулю: $y_i=0$.

в) Если $x_j>0$, т.е. j–й продукт вошёл в оптимальный план, то в соответствующем ограничении двойственной задачи реализуется знак равенства, это соответствует тому, что выручка от продажи ресурсов, идущих на производство единицы этого продукта, равна прибыли от его производства:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j. \qquad (1.8)$$

г) Если $x_j=0$, т.е. j–й продукт не входит в оптимальный план, то в соответствующем ограничении двойственной задачи реализуется знак “>”, что означает – выручка от продажи ресурсов, идущих на производство единицы этого продукта, больше прибыли от её производства:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i > c_j. \qquad (1.9)$$

3. Теневые цены y_i показывают, на сколько увеличится значение P_{max}, если запасы ресурса увеличить на единицу:

$$\Delta P_{\max} = \Delta b_i \cdot y_i. \qquad (1.10)$$

Убедимся в этом на нашем примере.

II. Изменение оптимального решения при изменении правых частей системы ограничений

Для практического использования теневых цен в решении задачи оптимального управления надо связать ценность ресурсов (теневые цены) и прибыль от производства. Увеличим запас одного из ресурсов, например, ДСП на малую величину $\Delta b_1=1$, т.е. $b_1=351$. Но b_1, b_2, b_3 – это коэффициенты целевой функции двойственной задачи. Как было сказано ранее, при изменении целевых коэффициентов существует некоторый интервал устойчивости. Если значение изменённого коэффициента остаётся внутри интервала устойчивости, оптимальное решение не изменится, т.е. изменение ресурса ДСП на единицу не приведёт к изменению цен y_1, y_2, y_3. Целевая функция при этом увеличится и составит

$$C'_{min} = C_{min} + \Delta b_1 \cdot y_1 \qquad (1.11)$$

Но $C_{min} = P_{max}$, это означает, что прибыль от производства увеличится на величину $$\Delta P_{max} = \Delta b_1 \cdot y_1. \qquad (1.12)$$

Отсюда *вывод*: "теневая цена" ресурса показывает, насколько увеличится прибыль от производства при увеличении данного ресурса на единицу.

Ясно, что если запасы ресурса избыточны (т.е. не полностью используются в оптимальном плане производства), то теневая цена такого ресурса не приведёт к увеличению прибыли, а только увеличит неиспользованный остаток. Теневые цены ресурсов будут изменяться, если изменение их запасов выйдут за пределы интервала устойчивости. Так, если уменьшить ежедневный запас стекла до величины, меньшей, чем 220м, прибыль изменится, теневая цена стекла y_2 перестанет быть равной нулю. В таблице 1.4, в отчёте об устойчивости приведены теневые цены и интервалы устойчивости изменения запасов каждого из ресурсов, в котором значения теневых цен сохраняется. Такая информация помогает менеджеру, не решая задачу заново, оценить, запасы, какого ресурса нужно увеличивать, чтобы максимально увеличить прибыль, и каково будет это увеличение. Влияние изменения запаса ресурсов можно прокомментировать следующим образом:

1. При решении симплекс-методом исходной задачи сразу же решается и двойственная задача. Отчёт Excel об устойчивости включает таблицу **"Ограничения"** и в ней колонку **"Теневая цена"**. Теневые цены – это оценки Y_i двойственной задачи. Они показывают, как меняется целевая функция при малом изменении b_i: $\Delta P = Y_i \cdot \Delta b_i$ (см. ниже).

2. Эти оценки верны только в пределах устойчивости решения, т.е. пока изменение b_i не изменяет угловую точку области допустимых решений, в которой достигается максимум целевой функции. При этом численные значения переменных решения X_j, конечно, изменяются. При выходе b_i за пределы устойчивости все теневые цены изменятся.

3. Пределы изменения правых частей системы ограничений (b_i), в которых оптимальное решение соответствует той же самой угловой точке, тоже даны в таблице "Ограничения". Это столбцы - "Допустимое увеличение" и "Допустимое уменьшение" (табл. 1.4). Причем, если ресурс используется полностью (дефицитный), то существует как верхний, так и нижний пределы. Если же ресурс используется не полностью, верхний предел устойчивости равен бесконечности (10^{30}).

4. Пределы устойчивости для изменения b_i даются при условии, что все остальные значения b_k ($k \neq i$) остаются неизменными, иначе будут меняться теневые цены.

5. Для оценки влияния одновременного изменения нескольких значений b_i следует вычислить относительные изменения для каждой правой части системы ограничений, $\frac{\Delta b_i}{\max \Delta b_i}$, где $\max \Delta b_i$ – это предел либо увеличения, либо уменьшения b_i (в зависимости от знака Δb_i), и вычислить сумму этих относительных

изменений. Если эта сумма больше 1, теневые цены изменятся, если – меньше 1, то не изменятся.

Рассмотрим на нашей задаче “Об оптимальном плане мебельного цеха” как повлияет изменение запасов некоторых ресурсов. Ответим на следующий вопрос: Как изменится целевая функция (прибыль) при изменении запасов ресурса b_i? Все вычисления внесём в табл. 1.7.

Таблица 1.7. Расчет прибыли при изменении запасов ресурсов

№	Изменение запаса ресурса	b_i	$\Delta P_i = y_i \cdot \Delta b_i$	ΔP_i
1	Увеличить запас ДСП на 150м.	500м	$\Delta P_1 = 40 \cdot 150$	6000у.е.
2	Увеличить запас ДСП на 250м.	600м	$\Delta P_2 = ?$	Нельзя найти по этой формуле, получим другую точку на графике
3	Уменьшить запас стекла на 40м.	200м	$\Delta P_3 = ?$	Нельзя найти по этой формуле, получим другую точку на графике
4	Уменьшить запас стекла на 20м.	220м	$\Delta P_4 = 20 \cdot 0$	0
5	Уменьшить ресурс труда на 40ч/дн	110ч	$\Delta P_5 = -40 \cdot 60$	-2400у.е.
6	Увеличить ресурс труда на 20ч/дн.	170	$\Delta P_6 = ?$	Нельзя найти по этой формуле, получим другую точку на графике

Эти расчеты получены согласно интервалам устойчивости по ресурсам (табл.1.4), а именно: ДСП(350-50;350+175), стекло(240-20; ∞), труд(150-50; 150+8,333).

1.4. Приёмы решения задач ЛП с помощью MS-Excel

Рассмотрим более сложные примеры задач ЛП, с большим количеством переменных решения, которые позволят продемонстрировать дополнительные технические приемы, полезные при исследовании моделей линейного программирования.

Мини-кейс “Планы закупок”

Задача №1.3 “*На кондитерской фабрике”*. Небольшая кондитерская фабрика должна закрыться на реконструкцию. Необходимо реализовать оставшиеся запасы сырья для производства конфет из ассортимента фабрики, получив максимальную прибыль. Запасы и расход каждого вида сырья для производства единицы продукции каждого вида, а также получаемая при этом прибыль представлены в таблице 1.6. Мастер цеха, используя свой большой опыт, предлагает выпустить по 200 пакетов каждого вида конфет из ассортимента, утверждая, что ресурсов должно хватить, а прибыль получится 1080у.е. Молодой менеджер, только что окончивший экономический институт, утверждает, что такие проблемы не решаются на глазок, а с помощью линейного программирования. Хозяин фабрики обещает менеджеру всю прибыль сверх 1080у.е., если он предложит лучший план, чем многоопытный мастер. Все параметры занесём в таблицу 1.8

Таблица 1.8. Основные параметры задачи “На кондитерской фабрике”

		Продукты

Сырье	Запасы	Ореховый звон	Райский вкус	Батончик	Белка	Ромашка
Темный шок.	1411	0,8	0,5	1	2	1,1
Светлый шок	149	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2
Сахар	815,5	0,3	0,4	1,3	1,3	0,05
Карамель	466	0,2	0,3	0,7	0,7	0,5
Орехи	1080	0,7	0,1	1,5	1,5	0
Прибыль за пакет		1	0,7	1,1	2	0,6

Математическая модель задачи №1.3. За переменные решения примем количество пакетов каждого из 5 видов конфет, выпускаемых фабрикой. Обозначим их как X_i, i=1,2,3,4,5. Тогда целевая функция, прибыль от производства данного количества пакетов каждого вида продукции, будет равна $\mathbf{P=1 \cdot X_1+0,7 \cdot X_2+1,1 \cdot X_3+2 \cdot X_4+0,6 \cdot X_5}$.

Ограничения на переменные: расход каждого вида сырья (в кг) на производство одного пакета каждого продукта можно найти на пересечении строки (сырье) и столбца (продукта) в таблице параметров. Это так называемые технологические коэффициенты производства. Расход темного шоколада на X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 пакетов каждого их продуктов не должен превышать запаса этого ресурса. Т.е. ограничение на темный шоколад будет иметь вид:

$$0,8x_1+0,5x_2+x_3+2x_4+1,1x_5 \le 1411.$$

Аналогично можно получить ограничения по другим ресурсам, кроме того, из экономического смысла задачи следует, что все $X_i \ge 0$.

$$\begin{cases} 0,8x_1+0,5x_2+x_3+2x_4+1,1x_5 \le 1411, \\ 0,2x_1+0,1x_2+0,1x_3+0,1x_4+0,2x_5 \le 149, \\ 0,3x_1+0,4x_2+0,6x_3+1,3x_4+0,05x_5 \le 815,5, \\ 0,2x_1+0,3x_2+0,3x_3+0,3x_4+0,7x_5 \le 466, \\ 0,7x_1+0,1x_2+0,9x_3+1,5x_4+0 \cdot x_5 \le 1080, \\ x_i \ge 0, i=1,2,3,4,5. \end{cases}$$

Решение мини-кейса "На кондитерской фабрике" с помощью MS-Excel

Организуем данные на листе MS-Excel так, как это показано в табл.1.9.

Таблица 1.9. Организация данных на листе MS-Excel задачи "На кондитерской фабрике"

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Оптимальный план для кондитерской фабрики**						
2			Продукты				
3	**Сырье**	**Запасы**	Ореховый звон	Райский вкус	Батончик	Белка	Ромашка
4	Темный шок.		0,8	0,5	1	2	1,1
5	Светлый шок.	149	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2
6	Сахар	815,5	0,3	0,4	0,6	1,3	0,05
7	Карамель	466	0,2	0,3	0,3	0,7	0,5
8	Орехи	1080	0,7	0,1	0,9	1,5	0
9	**Прибыль**		1	0,7	1,1	2	0,6
12			Ореховый звон	Райский вкус	Батончик	Белка	Ромашка
13		Переменные	0	0	0	0	0

15		**Расход**		Цель Р=	=Суммпроизв($C$13:$G$13;C9:G9)
16	Темный шок.	=Суммпроизв($C$13:$G$13;C4:G4)			
17	Светлый шок.	=Суммпроизв($C$13:$G$13;C5:G5)			
18	Сахар	=Суммпроизв($C$13:$G$13;C6:G6)			
19	Карамель	=Суммпроизв($C$13:$G$13;C7:G7)			
20	Орехи	=Суммпроизв($C$13:$G$13;C8:G8)			

В ячейках с C13 по G13 содержатся переменные решения. В ячейки B16 по B20 введены формулы, отражающие расход ресурсов на единицу каждого продукта. Повторив алгоритм решения задачи с помощью MS Excel (зад. № 1), получим решение. После команды “**Выполнить**” в ячейках с C13 по G13 (табл.1.10) можно прочесть ответ. Поскольку количество произведенных пакетов должны быть целыми числами, надо округлить значения полученных переменных до целых так, чтобы ограничения на ресурсы были строго соблюдены. В ячейках с C13 по G13 содержатся значения расходов ресурсов, которые необходимы для получения оптимального плана.

Таблица 1.10. Результаты решения задачи “На кондитерской фабрике”

	A	B	C	D	E	F	G
1	Оптимальный план для кондитерской фабрики						
2			**Продукты**				
3	**Сырье**	**Запасы**	Ореховый звон	Райский вкус	Батончик	Белка	Ромашка
4	Темный шок.	1411	0,8	0,5	1	2	1,1
5	Светлый шок.	149	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2
6	Сахар	815,5	0,3	0,4	0,6	1,3	0,05
7	Карамель	466	0,2	0,3	0,3	0,7	0,5
8	Орехи	1080	0,7	0,1	0,9	1,5	0
9	**Прибыль**		1	0,7	1,1	2	0,6
12			Ореховый звон	Райский вкус	Батончик	Белка	Ромашка
13		**Переменные**	**454,48**	**58,78**	**0,00**	**503,99**	**9,13**
14					Цель		
15		**Расход**		**Р=**	**1509,09**		
16	Темный шок.	**1411,00**					
17	Светлый шок.	**149,00**					
18	Сахар	**815,50**					
19	Карамель	**465,89**					
20	Орехи	**1080,00**					

После решения задачи об оптимальном плане для кондитерской фабрики молодой менеджер испытал двойственное чувство. С одной стороны, прибыль, соответствующая найденному им производственному плану, почти на 430 у.е. больше, чем по плану мастера, т.е. он заработал более 400 у.е., с другой стороны, в оптимальный план не вошёл его любимый “Батончик”. Как исправить ситуацию. Менеджеру необходимо ответить на следующие вопросы:

1. Как надо изменить норму прибыли для “Батончика”, чтобы он вошёл в оптимальный план?

2. Если ввести это изменение в данные и решить задачу заново, как изменится оптимальный план?

3. Какой ресурс является наиболее дефицитным (т.е. максимально влияет на прибыль)?

4. Можно ли сказать (не решая задачу снова), как изменится прибыль от производства, если количество этого ресурса оценено: а) с избытком в 10 весовых единиц; б) с недостатком в 5 единиц?

5. Есть ли другой способ добиться производства “Батончика” кроме изменения нормы прибыли?

Для того, чтобы ответить на эти вопросы, необходимо получить отчёт об устойчивости MS-Excel (табл. 1.11).

Таблица 1.11. Отчёт об устойчивости MS Excel задачи “На кондитерской фабрике”

Отчёт об устойчивости решения задачи “На кондитерской фабрике”					
Изменяемые ячейки					
Переменные	Результ. значение	Нормирован. стоимость	Целевой коэффициент	Допустим. увеличение	Допустим. уменьшение
Ореховый звон	**454,48**	0,00000	1	0,05230	0,01949
Райский вкус	**58,78**	0,00000	0,7	0,04396	0,34573
Батончик	**0,00**	-0,00874	1,1	0,00874	1E+30
Белка	**503,99**	0,00000	2	0,95641	0,02190
Ромашка	**9,13**	0,00000	0,6	0,10057	0,03957
Ограничения					
Имя (расход)	Результ. значение	Теневая цена	Ограничения правая часть	Допустим. увеличение	Допустим. уменьшение
Тёмный шок.	1411,00	**0,05**	1411	0,26241	7,95217
Светлый шок.	149,00	**2,50**	149	1,04225	11,86895
Сахар	815,50	**1,01**	815,5	0,39223	20,09215
Карамель	465,89	**0,00**	466	1E+30	0,11083
Орехи	1080,00	**0,23**	1080	16,04386	0,31805

Ответ на вопросы 1 и 2. Согласно отчёту об устойчивости (табл. 1.10), нормированная стоимость конфеты “Батончик”, не вошедшей в оптимальный план, составляет 0,00874у.е. Абсолютная величина этого числа показывает, на сколько надо увеличить прибыль от одного пакета этих конфет, чтобы “Батончик” вошёл в оптимальный план. Для этого решим задачу ещё раз, изменив один параметр, а именно, увеличив цену “Батончика” на 0,01у.е. В этом случае прибыль станет равной 1,11у.е. (табл. 1.12).

Таблица 1.12. Оптимальный план задачи “На кондитерской фабрике”

Оптимальный план №2 для кондитерской фабрики						
		Продукты				
Сырьё	Запасы	Ореховый звон	Райский вкус	Батончик	Белка	Ромашка
Тёмный шок.	1411	0,8	0,5	1	2	1,1
Светлый шок.	149	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2
Сахар	815,5	0,3	0,4	0,6	1,3	0,05

Карамель	466	0,2	0,3	0,3	0,7	0,5
Орехи	1080	0,7	0,1	0,9	1,5	0
Прибыль		1	0,7	**1,11**	2	0,6
		Ореховый звон	Райский вкус	Батончик	Белка	Ромашка
	Переменные	**0,00**	**217,50**	**1067,50**	**65,00**	**70,00**
	Расход		Цель: P=	**1509,18**		
Тёмный шок.	1383,25			1509,9		
Светлый шок.	149,00	454,48	58,78	0,00	503,99	9,13
Сахар	815,50					
Карамель	466,00					
Орехи	1080,00					

Видим, что малые изменения параметров приводят к серьёзным изменениям решения. Для сравнения, ниже прибыли, записаны результаты с прежней ценой на “Батончик”. В этом случае говорят, что решение задачи неустойчиво. *Решение называется неустойчивым, если малые изменения параметров приводят к огромным изменениям решения*. Эта неустойчивость особенно опасна при рассмотрении методов выбора решения в условиях риска. В нашей задаче прибыль в обоих случаях почти одинаковая, т.е. неустойчивость решения не страшная. Если ввести целочисленные ограничения на количество пакетов каждого вида продуктов, или потребовать ограничение: количество пакетов “Батончика” было не менее 100, 200, 300, получим альтернативные решения, сильно различающиеся по значениям переменных, но очень близких по прибыли. Это хорошо, т.к. *наличие многих “хороших” альтернативных решений позволяет менеджеру выбрать такое, которое в наилучшей степени отвечает тем или иным условиям, которые всегда присутствуют при принятии решений.*

Ответ на вопросы 3 и 4. Для ответа на эти вопросы посмотрим отчёт об устойчивости (табл.1.11). Согласно ему, наибольшей теневой ценой обладает ресурс - “светлый шоколад”. Но интервал устойчивости, соответствующий этой цене, очень маленький (149-11,87;149+1,04). Если запас этого ресурса уменьшить на 10 ед., то реальная прибыль будет ниже:

$$\Delta P_{\max} = \Delta b_2 \cdot y_2 = -10 \cdot 2{,}5 = -25\,у.е.$$

Эту формулу можно использовать, так как Δb_2=-10 попадает в интервал устойчивости. Если запас данного ресурса увеличить на 5 ед., предсказать увеличение прибыли нельзя, т.к. Δb_2=5 выходит за рамки интервала устойчивости. В этом случае задачу надо решать заново.

Ответ на вопрос 5. Необходимо обратить внимание на то, что какой-либо из ресурсов для производства “Батончика” является дефицитным и востребован другим продуктом. “Батончик” конкурирует с “Белкой” за ресурсы: сахар и орехи. Расход этих ресурсов на эти два продукта наибольший. Увеличение запасов этих ресурсов может привести к вхождению “Батончика” в оптимальный план. Так, если увеличить запасы сахара на 40 ед. и заново решить задачу на максимум, получим новый оптимальный план, где “Батончика” будет произведено более 1080 пакетов, прибыль при этом будет P=1547,8 у.е.

В окне ”**Добавление ограничения**” существует возможность потребовать целочисленности переменных решения. Для этого надо из предлагаемых ограничений выбрать ограничение “**цел**”. Решение ЗЦЛП в Excel делает невозможным получение информации об устойчивости решения и о теневых ценах. Поэтому “Поиск решения” MS Excel не формирует отчёта об устойчивости, если хотя бы для одной переменной введено условие целочисленности. Рассмотрим задачу.

Мини-кейс “Производство деталей для автомобилей”

Задача №1.4. Завод – производитель высокоточных элементов для автомобилей выпускает два различных типа деталей в количествах X и Y. Завод располагает фондом рабочего времени в 4000 чел. час в неделю. Для производства одной детали 1-го типа требуется 1 чел. час в день, а для производства одной детали 2-го типа – 2 чел. час в день. Производственные мощности завода позволяют выпускать максимум 2250 деталей 1-го типа и 1750 деталей 2-го типа в неделю. Каждая деталь 1-го типа требует 2кг металлических стержней и 5кг листового металла, а деталь 2-го типа – 5кг металлических стержней и 2кг листового металла Уровень запасов каждого вида металла составляет 10000кг в неделю. Кроме того, еженедельно завод поставляет 600 деталей 1-го типа своему постоянному заказчику. Существует профсоюзное соглашение, в соответствии с которым общее число производимых в течение одной недели деталей должно составлять не менее 1500 штук. Сколько деталей каждого типа надо производить, чтобы максимизировать общий доход за неделю, если доход от производства одной детали 1-го типа составляет \$30, а второго - \$40. Решить задачу в MS-Excel, найти интервалы устойчивости для запасов ресурсов и цен на детали.

Математическая модель задачи. Общий доход за неделю $P = 30x + 40y$

Найти $\max P = 30x + 40y$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x + 2y \le 4000, \\ 600 \le x \le 2250, y \le 1750, \\ 2x + 5y \le 10000, \\ 5x + 2y \le 10000, \\ x + y \ge 1500, x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Решение задачи в табл.1.13, отчёт об устойчивости в табл.1.14.

Таблица№1.13. Решение задачи №1.4

Производство деталей			
	Параметры		
Ресурсы	A	B	Огранич.
Фонд	1	2	4000
Стержн.	2	5	9250
Лист. мет.	5	2	10000
Соглаш	1	1	2750
Поставки	1	0	1500
Максимум	1	0	1500
Максимум	0	1	1250
Прибыль	30	40	
Переменн.	1500	1250	
Цель		95000	

Таблица №1.14. Отчёт об устойчивости задачи №1.4

Изменяемые ячейки							
			Результ.	**Нормир.**	**Целевой**	**Допустимое**	**Допустимое**
	Ячейка	**Имя**	**значение**	**стоимость**	**Коэффициент**	**Увеличение**	**Уменьшение**
	$B$12	Переменн. А	1500	0	30	70	10
	$C$12	Переменн. В	1250	0	40	20	28
Ограничения							
			Результ.	**Теневая**	**Ограничение**	**Допустимое**	**Допустимое**
	Ячейка	**Имя**	**значение**	**Цена**	**Правая часть**	**Увеличение**	**Уменьшение**
	$D$4	Фонд Огранич.	4000	17,5	4000	285,7142857	2000
	$D$5	Стержн. Огранич.	9250	0	10000	1E+30	750
	$D$6	Лист. мет. Огранич.	10000	2,5	10000	3000	3600
	$D$7	Соглаш Огранич.	2750	0	1500	1250	1E+30
	$D$8	Поставки Огранич.	1500	0	600	900	1E+30
	$D$9	Максимум Огранич.	1500	0	2250	1E+30	750
	$D$10	Максимум Огранич.	1250	0	1750	1E+30	500

Итак: прибыль завода $95000 в неделю, для этого надо изготовить 1500 деталей 1-го типа и 1250 деталей 2-го типа.

Задача №1.5. На тему: *“Оптимальный состав смеси”*. Фармацевтическая компания исследует возможность продвижения на рынок новой пищевой добавки, которая должна содержать микроэлементы: железо, кальций и фосфор. Добавка может быть получена путём смешивания ингредиентов, которые компания обозначает: T5, N1 и T4. Количество трёх микроэлементов (мг на 100мл), содержащихся в каждом из ингредиентов, минимальный и максимальный уровень каждого микроэлемента в 1,2 – литровой бутылке и издержки на производство 100 мл каждого ингредиента приведены в табл. 1.15. Менеджер хочет найти комбинацию ингредиентов в пищевой добавке, минимизирующие издержки на их производство. Составить математическую модель задачи и решить её. Менеджер внёс предложение продавать компонент N1 по 0,7руб за 100мл. В этом случае новую пищевую добавку придётся готовить только из смеси T5 и T4. Стоит ли принимать это решение?

Таблица 1.15. Данные задачи №1.5.

Ингредиент	**T5**	**N1**	**T4**	Min в бутылке	Max в бутылке
Железо	10	16	12	100	150
Кальций	400	600	800	6000	8000
Фосфор	800	550	500	3000	8000
Издержки на 100мл	0,75руб	0,60руб	0,55руб		

Решение задачи №1.5. Составим математическую модель задачи.

Пусть X_1(мг) – количество ингредиента T5 в пищевой добавке на 100мл;

X_2(мг) – количество ингредиента N1 в пищевой добавке на 100мл;

X_3(мг) – количество ингредиента T4 в пищевой добавке на 100мл.

Целевая функция F – издержки на производство 100 мл пищевой добавки. Тогда $F= 0{,}75X_1+0{,}60X_2+0{,}55X_3$.

В задаче надо найти minF при ограничениях:

$$\begin{cases} 8{,}33 \le 0{,}1x_1 + 0{,}16x_2 + 0{,}12x_3 \le 12{,}5; \\ 500 \le 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \le 666{,}67; \\ 250 \le 8x_1 + 5{,}5x_2 + 5x_3 \le 666{,}67; \\ x_j \ge 0,\ j = 1{,}2{,}3. \end{cases}$$

где 8,33–минимальный уровень железа в 100мл (100/12=8,33), т.к. 1,2л=1200мл; 12,5 – максимальный уровень железа в 100мл (150/12=12,5) и т.д.

Решая задачу в MS-Excel, получим следующий результат (табл. 1.16).
В расчёте на бутылку, содержащую 1,2 л, ответ будет следующим:
F_{min} =36,598*12=439(руб); при этом X_1=0; X_2=143(мг); X_3=643(мг).

В таблице 1.17 напечатан отчёт об устойчивости задачи №5.

Согласно отчёту по устойчивости, существует интервал изменения целевых коэффициентов (стоимость ингредиентов). Так, для N1 интервал – (0,6-0,1875;0,6+0,1333)=(0,4125;0,7333). Это означает, увеличение стоимости N1 до 0,7руб за 100мл, не меняет оптимальный план. Но целевая функция увеличится, станет равна 37,784 руб (за бутылку 453,5руб), т.е. издержки будут больше, а значит продавать кальций по 0,7 руб за 100 мл не выгодно.

Таблица 1.16. Результаты решения задачи №1.5

Оптимальные издержки производства пищевой добавки					
ингредиент	T5	N1	T4	min	max
железо	0,1	0,16	0,12	8,33	12,5
кальций	4	6	8	500	666,67
фосфор	8	5,5	5	250	666,67
издержки	0,75	0,6	0,55		
	x1	x2	x3		
переменн	0	11,85714	53,60714		
	целевая функция		P=	36,5982143	
железо	8,33				
кальций	500				
фосфор	333,25				

Таблица 1.17. Отчёт об устойчивости задачи №1.5

Изменяемые ячейки							
			Результ.	Нормир.	Целевой	Допустим.	Допустимое
	Ячейка	Имя	значение	стоимость	Коэффиц.	Увеличение	Уменьшение
	$B$9	переменн x1	0	0,367857143	0,75	1E+30	0,367857143
	$C$9	переменн x2	11,85714286	0	0,6	0,133333333	0,1875
	$D$9	переменн x3	53,60714286	0	0,55	0,25	0,1
Ограничения							
			Результ.	Теневая	Ограничен.	Допустимое	Допустимое
	Ячейка	Имя	значение	Цена	Правая часть	Увеличение	Уменьшение
	$B$12	железо целевая функция	8,33	0	12,5	1E+30	4,17
	$B$12	железо целевая функция	8,33	2,678571429	8,33	4,17	0,83
	$B$13	кальций целевая функция	500	0,028571429	500	55,33333333	187,625
	$B$14	фосфор целевая	333,25	0	666,67	1E+30	333,42

		функция					
	$B$13	кальций целевая функция	500	0	666,67	1E+30	166,67
	$B$14	фосфор целевая функция	333,25	0	250	83,25	1E+30

Логические переменные

Но на практике встречаются задачи, в которых необходимо введение условия целочисленности. Например, задачи, требующие решить, какие элементы из большого их набора нужно выбрать (“брать, не брать”), чтобы оптимизировать целевую функцию. К такой схеме сводятся некоторые задачи, например, при выборе оптимального набора проектов для инвестирования, оптимального набора мест размещения новых предприятий, проблема постоянных издержек при выборе оптимального плана производства и т.п. Во всех этих случаях необходимо ввести специальную целочисленную переменную, которая может принимать только два значения: 0 и 1. Такие логические переменные в математике называют “булевыми” переменными. В качестве примера рассмотрим задачу “Об оптимальном плане размещения предприятий”.

Задача №1.6. На тему: *“Оптимальный план размещения предприятий”*

Управляющий таксомоторной компанией хочет определить оптимальное расположение для стоянок своих такси. В таблице 1.18 собрана необходимая информация относительно предполагаемых точек стоянки. Важной характеристикой положения стоянки является способность персонала своевременно обслуживать заказы из тех районов города, которые находятся в зоне ответственности данной стоянки. Машина должна прибывать по заказу за время не превышающее некоторое максимальное.

Таблица 1.18. Информация о стоянках

Точка стоянки	Обслуживающие районы	Стоимость аренды, долл. в день
1	A, E	400
2	A, C, D	500
3	B, C, E	450
4	B, D	440
5	D, E	420

Из таблицы видно, места для стоянок позволяют обслужить по 2 или 3 района города. Управляющий должен выбрать некоторые из них так, чтобы каждый район города мог быть обслужен хотя бы одной из стоянок, и чтобы стоимость аренды была минимальной.

Математическая модель задачи №1.6. Занумеруем районы в очевидном порядке: A-1; B-2; C-3; D-4; E-5. Введём булевы параметры a_{ij}, равные 1, если с i - й стоянки можно обслужить j - й район, и равные нулю – если нельзя. Значения a_{ij} приведены в таблице параметров (табл.1.19). Введём также переменные решения X_i, принимающие только значения 1 или 0 в зависимости от того, выбрана данная точка стоянки управляющим или нет.

Таблица 1.19. Параметры задачи об оптимальном размещении стоянок такси

Точка	Обслуживаемые районы	Стоимость, долл.

стоянки	A (1)	B (2)	C (3)	D (4)	E (5)	в день
1	1	0	0	0	1	400
2	1	0	1	1	0	500
3	0	1	1	0	1	450
4	0	1	0	1	0	440
5	0	0	0	1	1	420

Целевой функцией в данной задаче являются затраты на выбранные места аренды. Очевидно это:

$$C = x_1 \cdot c_1 + x_2 \cdot c_2 + x_3 \cdot c_3 + x_4 \cdot c_4 + x_5 \cdot c_5 = \sum_{j=1}^{5} c_j \cdot x_j \qquad (1.13)$$

В качестве ограничений нужно подсчитать, сколько выбранных стоянок могут обслужить данный район. Для района (А) число стоянок будет: $N_1 = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 0 + x_4 \cdot 0 + x_5 \cdot 0$, для (B) - $N_2 = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 1 + x_4 \cdot 1 + x_5 \cdot 0$,

для (C) - $N_3 = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 1 + x_4 \cdot 0 + x_5 \cdot 0$,

для (D) - $\boxed{N_4 = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 0 + x_4 \cdot 1 + x_5 \cdot 1}$,

для (E) - $N_5 = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 1 + x_4 \cdot 0 + x_5 \cdot 1$.

Так как, для выполнения требования о том, что каждый район должен обслуживаться хотя бы одной из выбранных стоянок, необходимо ввести в качестве ограничений условие, что каждое из чисел N_i должно быть больше или равно единицы.

Организация данных на листе MS-Excel. Для практического решения задачи с помощью MS-Excel организуем данные так, как показано в табл.1.20.

Таблица 1.20. Организация данных задачи № 1.6 на листе MS-Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Оптимальный план размещения стоянок							
2		Обслуживаемые районы						
3	Точка	A	B	C	D	E	Стоимость	Перемен.
4	стоянки						в сут. (руб)	решения
5	1	1	0	0	0	1	400	X1
6	2	1	0	1	1	0	500	X2
7	3	0	1	1	0	1	450	X3
8	4	0	1	0	1	0	440	X4
9	5	0	0	0	1	1	420	X5
10		Целевая функция	=Суммпроизв($H$5:$H$9;G5:G9)					
11								
12		Ограничения	=Суммпроизв($H$5:$H$9;B5:B9)					
13			=Суммпроизв($H$5:$H$9;C5:C9)					
14			=Суммпроизв($H$5:$H$9;D5:D9)					
15			=Суммпроизв($H$5:$H$9;E5:E9)					
16			=Суммпроизв($H$5:$H$9;F5:F9)					

После введения целевой функции: Суммпроизв($H$5:$H$9;G5:G9) в ячейку C10 и ограничений Суммпроизв($H$5:$H$9;B5:B9), распространив формулу на все районы (ячейки C10:F10), надо в установках **“Поиска решений”** ввести требования для булевских переменных, а именно:

H5:H9≥0, H5:H9≤1, H5:H9–целые.

После вызова **“Поиск решения”** и выполнения необходимых установок получим решение в ячейках H5:H9, в ячейке D10 найдём значение целевой функции (табл. 1.21), а в ячейках B10:F10 значения чисел N_i (число районов, обслуживаемых каждой стоянкой).

Таблица 1.21. Решение задачи об оптимальном плане размещения стоянок такси

Оптимальный план размещения стоянок								
	Обслуживаемые районы							Переменные
Точка	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	Стоимость		решения
стоянки						в сут. (руб)		
1	1	0	0	0	1	400	x1	**0**
2	1	0	1	1	0	500	x2	**1**
3	0	1	1	0	1	450	x3	**1**
4	0	1	0	1	0	440	x4	**0**
5	0	0	0	1	1	420	x5	**0**
	Целевая функция		**950**					
	Ограничения		**1**					
			1					
			2					
			1					
			1					

Введение ограничения целочисленности переменных не позволит получить информацию об устойчивости решения и о теневых ценах.

В задачах типа “брать, не брать” при малых изменениях параметров оптимальные решения резко меняются, но целевая функция остаётся примерно постоянной. Это означает наличие множества альтернативных решений, близких к оптимальным, что позволяет специалисту выбрать решение, удовлетворяющее другим, не учтённым факторам.

Мини-кейс ”Оптимизация инвестиционного портфеля”

Задача №1.7. Частный инвестор предполагает вложить 500 тыс. рублей в разные ценные бумаги. После консультаций со специалистами фондового рынка он отобрал три типа акций, два типа государственных облигаций. Часть денег предполагает положить на срочный вклад в банк. Из качественных соображений и личных предпочтений, инвестор выдвигает следующие требования к портфелю ценных бумаг:

а) все 500 тыс. руб. должны быть инвестированы;

б) по крайней мере, 100 тыс. руб. должны быть на срочном вкладе в банке (не меньше);

в) по крайней мере, 25% средств, инвестированных в акции, должны быть инвестированы в акции с низким риском (не меньше);

г) в облигации надо инвестировать, по крайней мере, столько же средств сколько в акции (не меньше);

д) не более чем 125 тыс. руб. должно быть вложено в бумаги с доходом менее чем 10%.

Данные о предполагаемых доходах по ценным бумагам см. в таблице 1.22.

В задаче требуется ответить на вопросы:

1. Определить портфель бумаг инвестора, который удовлетворяет всем требованиям и максимизирует годовой доход. Какова величина этого дохода?

2. Если инвестор вносит дополнительные средства в портфель бумаг, сохраняя все ограничения, как изменится ожидаемый годовой доход?

3. Ожидаемый годовой доход по той или иной бумагах (особенно по акциям) – это не более чем оценка. На сколько оптимальный портфель и ожидаемая величина дохода от портфеля выбранных бумаг чувствительны к этим оценкам? Какая именно бумага портфеля наиболее сильно влияет на оценку суммарного ожидаемого дохода?

4. Дать интерпретацию значений теневых цен для правых частей каждого из ограничений.

Таблица 1.22. Данные к задаче №1.7.

Тип вложения	Риск	Предполагаемый ежегодный доход (%)	Переменные
Акция А	высокий	15%	Y_1
Акция В	средний	12%	Y_2
Акция С	низкий	9%	Y_3
Долгосрочные облигации		11%	Y_4
Краткосрочные облигации		8%	Y_5
Срочный вклад		6%	Y_6

Математическая модель задачи. В качестве переменных решения примем суммы, вложенные в каждый вид ценных бумаг $\{y_i,\ i=1,2,3,4,5,6\}$.

Целевая функция F(Y) - это суммарный доход (ожидаемая доходность портфеля) будет равна сумме произведений долей акций в портфеле на их доходность. При этом максимально возможная доходность портфеля акций равна доходности самой прибыльной из акций, а минимально возможная доходность портфеля – доходность самой непривлекательной акции. В этих крайних случаях портфель акций будет содержать только акции одного вида.

$$F(Y) = 0{,}15y_1 + 0{,}12y_2 + 0{,}09y_3 + 0{,}11y_4 + 0{,}08y_5 + 0{,}06y_6 \to \max \qquad (1.14)$$

Ограничения задачи: а) Требование инвестировать всю сумму доходности должно быть в виде равенства: $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 500$;

б) Не меньше 100 тыс. руб. должны быть на срочном вкладе, т.е. $y_6 \geq 100$;

По аналогии можно описать остальные ограничения, так

в) $0{,}25(y_1 + y_2 + y_3) \leq y_3$ или $y_1 + y_2 - 3y_3 \leq 0$;

г) $y_4 + y_5 \geq y_1 + y_2 + y_3$ или $y_1 + y_2 + y_3 - y_4 - y_5 \leq 0$;

д) $y_3 + y_5 + y_6 \leq 125$; очевидно, все $y_i \geq 0, i = \overline{1{,}6}$.

Получили задачу ЛП, которую можно решить в MS-Excel, для этого организуем данные, как в таблице 1.23.

Таблица 1.23. Организация данных задачи №1.7 на листе MS-Excel

	A	B	C	D	E
1	Оптимизация инвестиционного портфеля				
2					
3.	Тип вложения	Риск	Ежегодн. доход		Переменные

4.Акции -А	высокий	0,15		0
5.Акции -В	средний	0,12		0
6.Акции -С	низкий	0,09		0
7. Долгосрочные облиг.		0,11		0
8. Краткосрочные облиг.		0,08		0
9. Срочный вклад		0,06		0
10. F=	=Суммпроизв($E$4:$E$9;C4:C9)			
11. Ограничения	=Сумм($E$4:$E$9)			
12.	=Сумм($E$9)			
13.	=Сумм($E$4:$E$5)-3*$E$6			
14.	=Сумм($E$4:$E$6)-$E$7-$E$8			
15.	=Сумм($E$6;$E$8;$E$9)			
16.	=Сумм($E$9)			
17.	=Сумм($E$6)			
18.	=Сумм($E$7:$E$8)			

Таблица 1.24. Оптимальное решение задачи№1.7

Оптимизация инвестиционного портфеля				
Тип вложения	Риск	Ежегодный доход		Переменные
Акции -А	высокий	0,15	Y1	75
Акции -В	средний	0,12	Y2	0
Акции -С	низкий	0,09	Y3	25
Долгосрочные облиг.		0,11	Y4	300
Краткосрочные облиг.		0,08	Y5	0
Срочный вклад		0,06	Y6	100
F=	52,5			
Ограничения				
	500			
	100			
	0			
	200			
	125			
	100			
	25			
	300			

Исследуем задачу на чувствительность и ответим на поставленные вопросы, для этого обратимся к отчёту об устойчивости (табл. 1.25).

Таблица 1.25. Отчёт об устойчивости задачи №1.7.

Изменяемые ячейки						
Ячейка	**Имя**	**Результ. значение**	**Нормир. стоимость**	**Целевой Коэфф.**	**Допустим. Увеличен.**	**Допустим. Уменьшен.**
$E$4	высокий - X1	75	0	0,15	1E+30	0,03
$E$5	средний - X2	0	-0,03	0,12	0,03	1E+30
$E$6	низкий - X3	25	0	0,09	1E+30	0,1
$E$7	Долгосрочные облиг. – X4	300	0	0,11	0,025	1E+30
$E$8	Краткосрочные облиг. X5	0	-0,13	0,08	0,13	1E+30
$E$9	Срочный вклад – X6	100	0	0,06	0,15	1E+30
Ячейка	**Имя**	**Результ. значение**	**Теневая цена**	**Правая часть огр.**	**Допустим. Увеличен.**	**Допустим. Уменьшен.**
$B$14		500	0,11	500	200	200
$B$15		100	-0,15	100	25	28,57142857
$B$16		0	0,04	0	100	75

$B$21		300	0	500	1E+30	200
$B$17		200	0	500	1E+30	300
$B$19		100	0	500	1E+30	400
$B$20		25	0	500	1E+30	475
$B$17		200	0	0	200	1E+30
$B$18		125	0,1	125	25	25
$B$18		125	0	0	125	1E+30

1) Максимальный годовой доход портфеля равен 52,5 тыс. руб., который получен при инвестициях: в акции “А” надо инвестировать 75 тыс. руб., доход от них равен 11,25 тыс. руб. В акции “В” – 0. В акции “С” надо инвестировать 25 тыс. руб., доход от которых – 2,25 тыс. руб. В долгосрочные облигации надо вложить 300 тыс. руб., доход от них будет - 33 тыс. руб. Краткосрочные облигации покупать не выгодно. Срочный вклад – 100 тыс. руб., доход от него 6 тыс. руб. Итого: 11,25+2,25+33+6=52,5 (тыс. руб.).

2) Обозначим теневые цены за x_i. Так как общая интерпретация теневых цен связана с формулой

$$\Delta F(y) = x_i \cdot \Delta b_i, i = \overline{1,n},$$

каждый дополнительный рубль, инвестированный в портфель, даст 11% прибыли, т.к. теневая цена переменной, соответствующей первому ограничению 0,11(руб).

3) Все дополнительные инвестиции должны идти в долгосрочные облигации, это не нарушит ни одного ограничения и это выгодно.

4) Теневая цена второго ограничения <0, потому что акции средней доходности не вошли в оптимальный план и на прибыль не влияют. Чтобы их было выгодно покупать, надо увеличить их доходность на 0,03 руб (см. нормируемую стоимость). Краткосрочные облигации станут приносить доход, если их прибыль увеличить на 0,13 руб.

Задача №1.8. На тему **“Реклама и маркетинг”.**

Региональная компания хочет, чтобы её рекламные объявления достигли, по крайней мере, 1 млн. человек. Она планирует провести рекламу через местное TV, радиостанции, почту, местные газеты и электронную почту. Маркетинговый отдел оценивает эффективность рекламы в различных каналах следующим образом (см.табл. 1.26).

Таблица 1.26. Эффективность рекламы в различных каналах

	Местное TV	Радиостанции	Почта	Местные газеты	Электрон. почта
Эффективность	0,70	0,60	0,30	1,00	0,10
Размер аудитор	50000	25000	20000	15000	100000

Таким образом, хотя местные студии TV имеют аудиторию в среднем 50 тыс. человек, рекламное воздействие, эквивалентное полученному через газеты, получат только 50000*0,7=35000(чел), радиостанции – 25000*0,6=15000(чел), почта – 20000*0,3=6000(чел), электронная почта – 100000*0,1=10000(чел).

В таблице 1.27 приведены данные о количестве объектов, на которых можно размещать рекламу, средней аудитории, которую охватывают данные СМИ или организации и цены на рекламную акцию.

Таблица 1.27. Данные задачи №1.8

	Местное TV	Радиостанции	Почта	Местные газеты	Электронная почта
Цена ($)	600	200	250	280	300
Максим. кол-во объект.	13	15	10	17	3
Размер ауд. (чел)	35000	15000	6000	15000	10000

В задаче требуется минимальную стоимость рекламной компании, и ответить на вопрос: Сколько денег следует вложить в каждый канал?

Решение задачи. Составим математическую модель задачи. Обозначим за x_i – количество объектов каждого канала, задействованных в рекламной компании. *Цель задачи*: минимальная стоимость рекламной компании равна:

$$F(X) = 600x_1 + 200x_2 + 250x_3 + 280x_4 + 300x_5 \to \min$$

На переменные накладываются ограничения:

$$\begin{cases} x_1 \le 13; x_2 \le 15; x_3 \le 10; x_4 \le 17; x_5 \le 3; x_i \ge 0, i = 1,2,3,4,5 \\ 35000x_1 + 15000x_2 + 6000x_3 + 15000x_4 + 10000x_5 \ge 1000000 \end{cases}.$$

Решая задачу в MS-Excel, получим решение (табл. 1.28).

Таблица 1.28. Решение задачи №1.8

Реклама и маркетинг					
	Меотн.TV	Радиост.	Почта	Газеты	Эл.почта
Размер ауд.	35000	15000	6000	15000	10000
Кол. Объектов	13	15	10	17	3
Цена	600	200	250	280	300
	Цель	17960			
Переменные	X1	X2	X3	X4	X5
	13	15	6	17	3
Ограничения	13				
	15				
	6				
	17				
	3				
	1001000				

Ответ: Минимальные издержки на рекламу компании - 17960$. При этом надо использовать все объекты каналов кроме почты. Из десяти почтовых объектов для рекламы надо использовать только шесть. Тогда рекламные объявления достигнут 1001000 человек, а в каждый канал потребуется вложить
в TV: 600*13=7800($); в радиостанции: 200*15=3000($);
в почту: 250*6=1500($); в газеты: 280*17=4760($);
в электронную почту: 3000*3=900($).

Контрольные вопросы к разделу 1

1. В чём состоит предмет линейного программирования (ЛП).
2. В каких реальных ситуациях можно применять модели, разработанные для условий полной определённости?
3. Дайте определение «целевой функции, переменных решения, параметров модели и ограничений».

4. Какой общий вид должны иметь целевая функция и ограничения, чтобы для решения можно было применить методы ЛП.

5. В чём состоит анализ решения задачи ЛП, после того как оптимальное решение найдено? На какие вопросы этот анализ должен ответить? Почему он важен для принятия управленческих решений?

6. Как выглядит область допустимых решений задачи ЛП для двух переменных в случае её графического решения?

7. Как определить решение задачи ЛП для двух переменных геометрически?

8. В чём суть двойственной задачи ЛП и как её составить?

9. Какова связь между двойственной парой задач ЛП? Можно ли записать решение двойственной задачи, если известно решение исходной?

10. Объясните смысл понятия «теневая цена» в задаче об оптимальном производственном плане. Какую важную информацию дают значения теневых цен для менеджера?

11. Что называется интервалом устойчивости для изменения целевого коэффициента? Изменится ли целевая функция при изменении целевого коэффициента внутри этого интервала?

12. Каков смысл столбца «Нормированная стоимость» в отчёте об устойчивости MS-Excel.

13. Может ли теневая цена ресурса совпадать с его рыночной ценой? Стоит ли увеличивать запасы ресурса, если решалась задача о максимизации прибыли?

14. Может ли теневая цена равняться нулю? Что это значит?

15. Что является теневыми ценами для двойственной задачи?

16. что остаётся постоянным при изменении правой части ограничений b_i (запаса i-того ресурса) внутри его интервала устойчивости?

17. Всегда ли можно пользоваться формулой: $\Delta P_{max}=Y_i \cdot \Delta b_i$ для расчёта увеличения прибыли при увеличении запаса i –того ресурса?

18. В каких случаях можно применить формулу: $\Delta P_{max}=\sum Y_i \cdot \Delta b_i$ для расчёта прибыли, если изменяются запасы нескольких ресурсов одновременно?

19. Всегда ли стоит вводить целочисленные ограничения, чтобы получить целые решения? Есть ли отрицательные последствия введения таких ограничений?

20. Что такое логические переменные? В каких задачах их применение необходимо?

Задачи для самостоятельного решения к разделу 1

1.1) *Оптимальный план размещения производственных заказов*

Фирма планирует производить 300 тыс. однотипных изделий на четырёх своих предприятиях ежемесячно. Для освоения этого нового вида продукции выделено 18000 тыс. руб. Разработанные для каждого филиала проекты освоения новой продукции характеризуются определёнными значениями себестоимости одного изделия и необходимыми удельными капиталовложениями (табл.1.29).

Таблица 1.29. Данные задачи №1

	Филиалы				
	1	2	3	4	Всего, тыс.
Переменные решения	X_1	X_2	X_3	X_4	300
Издержки на ед. продук.	83	89	95	98	

Инвестиции на ед. прод.	120	80	50	40	18000

Издержки производства и капиталовложения пропорциональны количеству выпускаемой продукции. Определить план размещения объёмов производства по филиалам, при котором суммарные издержки будут минимальными.

1.2) *Максимизация прибыли универмага*

Универсальный магазин собирается заказать новую коллекцию костюмов для весеннего сезона. Решено заказать 4 типа костюмов. Три типа – костюмы широкого потребления: (1) костюмы из полиэстровых смесей, (2) шерстяные костюмы и (3) костюмы из хлопка. Четвёртый тип – это дорогие импортные костюмы из различных тканей. Специальные исследования позволяют оценить средние затраты рабочего времени продавцов на продажу одного костюма каждого типа, количество средств на рекламу и площадей в расчёте на один костюм. Все эти данные, а также прибыль от продажи одного костюма каждого типа представлены в табл.1.30.

Таблица 1.30. Данные задачи №2

Тип костюма	Прибыль на один костюм, $	Рабочее время продавцов	Затраты на рекламу на 1 кос.	Площадь на один костюм
Полиэстер	35	0,4	$2	1,00
Шерсть	47	0,5	$4	1,50
Хлопок	30	0,3	$3	1,25
Импорт	90	1.0	$9	3,00

Предполагается, что сезон будет длиться 90 дней. Магазин открыт 10 часов в день, 7 дней в неделю. Два продавца постоянно будут в отделе костюмов. Выделенная отделу площадь 100*60 м. Бюджет на рекламу составляет $15тыс.

а) Сколько костюмов каждого типа нужно закупить, чтобы максимизировать прибыль? б) Допустим, что менеджмент магазина считает необходимым закупить не менее 200 костюмов каждого типа. Как это требование повлияет на прибыль магазина? в) Изменится ли оптимальное решение, если стоимость одного полиэстрового костюма переоценена (недооценена) на $1; $2? г) Будет ли полезно для магазина, если истратить дополнительно $400 на рекламу? д) Как повлияет на оптимальное решение условие, ограничивающее общее число закупленных костюмов 5 тыс. штук?

1.3) *Банк и 6 проектов*

Управляющему банка были представлены предложения о 6 проектах. Проект «Производство-1» должен принести банку прибыль $680 тыс., проект «Производство-2» - $715 тыс., проект «Розничная торговля-1» - $570 тыс., проект «Розничная торговля-2» - $420 тыс., проект «Оптовая торговля» -$525 тыс. и проект «Реклама» - $1400 тыс.

При рассмотрении этих предложений управляющий должен принять во внимание потребность проектов в наличности и массу доступной наличности для соответствующих периодов (табл.1.31).

Таблица 1.31. Данные задачи №3

Проект	Наличные потребности, тыс.$			
	Период 1	Период 2	Период 3	Период 4
Производство-1	1000	1000	900	500
Производство-2	700	750	1500	300
Розничная торговля-1	1000	1500	500	0
Розничная торговля-2	600	1200	0	0
Оптовая торговля	800	800	800	1100
Реклама	900	1200	1500	2000

Доступная наличность - $4 млн. в течение периода 1; $4,5 млн. в течение периода 2; $5млн. в течение периода 3 и $5,5 млн. в течение периода 4.

а) Какие проекты следует финансировать и какое количество наличности необходимо в течение каждого периода, чтобы получить максимальную прибыль?

б) Банк может получить дополнительно \$200 тыс. в первом периоде и \$1200 тыс. во втором, но это обойдётся ему в \$300 тыс. Стоит ли воспользоваться этой возможностью?

Часть 2
Транспортные задачи и логистика, задачи о назначениях и отборе

В деловой практике широко используются две модели: транспортная задача и задача о назначениях. Представление о том, что такое транспортная задача, у специалиста по исследованию операций и у менеджера отдела логистики очень сильно различаются. Сточки зрения менеджера, транспортные задачи – это любые задачи, связанные с оптимизацией перевозок. С точки зрения специалиста по исследованию операций, транспортная задача – это специальный вид задачи линейной оптимизации, для которой из-за её формулировки и специфических ограничений существуют свои эффективные алгоритмы решения. Это могут быть задачи, не связанные с перевозками.

2.1. Математическая модель транспортной задачи

Транспортная задача. Классическая транспортная задача (ТЗ) имеет своей целью минимизацию транспортных издержек (или максимизацию прибыли) при перевозках однотипных грузов (контейнеров, вагонов, машин и т.п.) от нескольких поставщиков (с различных складов), расположенных в разных местах, к нескольким потребителям. При этом принимается в расчет только переменные транспортные издержки, которые пропорциональны количеству перевезённых единиц груза. Рассмотрим задачу.

<u>*Задача №2.1.*</u> В районе имеется два песчаных карьера, с которых песок вывозится на 5-ти тонных грузовиках. Предприятия, S_1 и S_2, разрабатывающие карьеры (*поставщики* песка), могут поставлять соответственно 100 и 200 грузовиков с песком в день. В этом районе имеется три завода железобетонных конструкций (*потребители* песка) D_1, D_2 и D_3, которым требуется соответственно 80, 90 и 130 грузовиков с песком в день. Стоимости перевозки песка одним грузовиком от карьера S_i (i=1, 2) к заводу D_j (j=1, 2, 3) в условных единицах, приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1. Параметры задачи №2.1

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	Запасы
S_1	3	6	4	100
S_2	8	4	5	200
Заказы	80	90	130	300

Математическая модель задачи №2.1. В нашей задаче шесть маршрутов. Обозначим количество грузовиков X_{ij}, перевозимое с карьера S_i на завод D_j. Таким образом, у нас шесть переменных. Целевая функция в данной задаче - *суммарные транспортные издержки* – равна сумме произведений переменных решения X_{ij} на стоимости перевозки единицы груза C_{ij}, приведённые в табл. 2.1. Таким образом,

$$C = 3\cdot x_{11} + 6\cdot x_{12} + 4\cdot x_{13} + 8\cdot x_{21} + 4\cdot x_{22} + 5\cdot x_{23} \qquad (14)$$

Чтобы удовлетворить все требования потребителей, т.е. выполнить все заказы, надо чтобы:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 80, \\ x_{12} + x_{22} = 90, \\ x_{13} + x_{23} = 130 \end{cases} \qquad (2.1)$$

Чтобы удовлетворить поставщиков, т.е. вывести весь груз, необходимо, чтобы

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 200. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Так как поставки не могут быть отрицательными, то $X_{ij} \geq 0$. (2.3)

При этом предполагается, что спрос и предложение отвечают условию баланса, т.е. $S_1+S_2=D_1+D_2+D_3$. (2.4)

В общем случае ТЗ выглядит так: Пусть имеется “m” поставщиков некоторой однородной продукции и “n” потребителей этой продукции. В “m” пунктах отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$ сосредоточено определённое количество некоторого однородного груза $\{a_i\}$, (i=1,2,…,m). Данный груз потребляется в “n” пунктах $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Объёмы потребления b_j (j=1,2,…n). Известны расходы на перевозку единицы груза из пункта A_i в пункт B_j, которые равны c_{ij}. Матрица $C = (c_{ij}), i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n.$ называется *тарифной матрицей*. Где c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю. Эта матрица имеет “m” строк (число поставщиков) и “n” столбцов (число потребителей). Требуется составить такой план прикрепления потребителей к поставщикам (план перевозок), при котором весь груз от поставщиков будет вывезен, потребности потребителей полностью удовлетворены и общая величина транспортных издержек будет минимальной.

Пусть X_{ij} – количество груза, перевозимого из пункта A_i в B_j, тогда целевая функция имеет вид:

$$F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (2.5)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i, i = 1, \overline{m}, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j, j = 1, \overline{n}, x_{ij} \geq 0. \end{cases} \qquad (2.6)$$

условия (20) означают полное удовлетворение спроса во всех пунктах потребления и полный вывоз продукции от всех поставщиков. Условие баланса для ТЗ имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\ . \qquad (2.7)$$

Если это условие не выполняется, специальные высокоэффективные методы решения задачи не могут быть применимы.

2.2. Методы решения ТЗ

ТЗ решается в два этапа:

а) Первоначальное закрепление потребителей за поставщиками или первоначальное распределение груза.

б) Получение оптимального плана решения ТЗ.

Количество ограничений в ТЗ задаче не являются независимыми. Если число переменных, равных ((m×n)-(m+n)), положить равными 0, тогда остальные можно найти из системы (2). Получившийся план перевозок необязательно будет оптимальным, но он обязательно является допустимым, так как удовлетворяет всем ограничениям. Такой план называется **опорным**. *От множества других допустимых планов он отличается тем, что число ненулевых переменных решения равно сумме числа поставщиков и потребителей минус единица, т.е. (m+n-1)*. В теории ЛП доказывается, что оптимальный план обязательно является опорным, т.е. искать *оптимальный план перевозок надо только среди опорных планов*. В этом и состоит основное значение опорного плана. Процесс решения ТЗ удобно оформлять в виде последовательности таблиц вида табл. 2.1.

Методы определения опорных планов

По аналогии с другими задачами ЛП решение ТЗ начинается с построения допустимого базисного плана. Наиболее простой способ его нахождения – *метод северо-западного угла*. Суть метода состоит в последовательном распределении всех запасов, имеющихся в первом, втором и т. д. пунктах производства, по первому, второму и т. д. пунктам потребления. В каждую клетку, начиная с (1,1) (с левого верхнего угла транспортной таблицы) делается максимально - возможная по строке и столбцу поставка. Каждый шаг распределения сводится к попытке полного исчерпания запасов в очередном пункте производства или к попытке полного удовлетворения потребностей в очередном пункте потребления, т.е. на каждом шаге из рассмотрения выпадает либо одна строка, либо один столбец.

$$x_{ij} = \min\left(a_i, b_j\right), \text{ i=1,…,m; j=1,…,n.} \tag{2.8}$$

Но могут появиться *особые случаи*, когда на некотором шаге заполнения из рассмотрения выпадают одновременно и строка и столбец. В этом случае дают нулевую (фиктивную) поставку в произвольную, но не вычеркнутую клетку или строки, или столбца. Надо, чтобы количество заполненных клеток обязательно равнялось *(m+n-1)*.

Первоначальный план перевозок задачи №8: X_{11}= min(80, 100)=80; X_{12}=min(100-80, 90)=20; X_{22}=min(90-20, 200)=70; X_{23}=min(130, 200-70)=130 (табл. 2.2).

Таблица 2.2. План №1 распределения поставок задачи №2.1

№1	D_1	D_2	D_3	**Запасы**
S_1	3 **80**	6 **20**	4	**100**
S_2	8	4 **70**	5 **130**	**200**
Заказы	**80**	**90**	**130**	**300**

Число занятых клеток равно 2+3-1=4. Особенность опорного плана, построенного методом северо-западного угла, является то, что целевая функция на нём принимает значение, как правило, далёкое от оптимального плана. Это происходит потому, что при его построении никак не учитываются значения c_{ij}.

Кроме метода северо-западного угла существует другой метод, учитывающий тарифы перевозок.

Это метод <u>*минимального (максимального) элемента*</u>. По этому методу при распределении объёмов перевозок в первую очередь занимаются клетки с наименьшими (наибольшими) ценами.

В нашей задаче этот план будет таким: x_{13}=min(100,130)=100; x_{23}=min(130-100;200)=30; x_{22}=min(200-30;90)=90; x_{21}=min(200-120;80)=80 (табл. 2.3).

Таблица 2.3. Опорный план №2 распределения поставок задачи №2.1

№2	D_1	D_2	D_3	**Запасы**
S_1	3 **80**	6	4 **20**	**100**
S_2	8	4 **90**	5 **110**	**200**
Заказы	**80**	**90**	**130**	**300**

Стоимость плана №1: $C_1=80\cdot3+20\cdot6+70\cdot4+130\cdot5=1290$,

Стоимость плана №2: $C_2=80\cdot3+20\cdot4+90\cdot4+110\cdot5=1230$.

План №2 дешевле. Далее начинается второй этап решения транспортной задачи. Полученный план надо проверить на оптимальность.

Методы определения оптимального плана

Существуют различные методы проверки допустимого опорного плана на оптимальность. Первоначальное распределение поставок разбила все переменные X_{ij} на два вида: отличные от нуля (базисные) и равные нулю (свободные). *Критерием оптимальности*, так же как в ЗЛП, является следующее условие: чтобы допустимый план (X_{ij}) ТЗ был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при свободных переменных в целевой функции были: в задаче на min - неотрицательные, в задаче на max – неположительные. В транспортной задаче произвольная переменная X_{ij} отождествляется с содержимым соответствующей клетки (i,j) таблицы поставок. Коэффициент α_{ij} при свободных переменных x_{ij} в выражении линейной функции F через свободные переменные называется оценкой свободной клетки (i,j).

$$F = F_0 + \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} x_{ij} . \qquad (2.9)$$

Тогда критерий оптимальности формулируется следующим образом*: базисное распределение поставок оптимально тогда и только тогда, когда оценки всех свободных клеток* - *неотрицательные (на* min*), неположительные (на* max*).*

Разные методы проверки плана на оптимальность отличаются друг от друга различными подходами к вычислению таких коэффициентов. Наиболее известные методы: метод потенциалов и распределительный метод.

<u>*Метод потенциалов*</u>. По этому методу каждому поставщику (строке) и каждому потребителю (столбцу) ставится в соответствие числа U_i и V_j, i=1,…,m; j=1,…,n, называемые *потенциалами*. Потенциалам можно дать экономическую интерпретацию. U_i можно интерпретировать как цену груза в пункте A_i (поставщика), а V_j можно условно принять за цену груза в пункте B_j

(потребителя). В простейшем случае *цена продукта в пункте потребителя равна цене в пункте поставщика + транспортные расходы на доставку*, т. е.

$$v_j = u_i + c_{ij} \tag{2.10}$$

Соотношения (2.10) составляются для базисных (занятых) клеток. Число таких уравнений равно “m+n-1”, а число неизвестных “m+n”, т.е. система (2.10) имеет множество решений. Для решения этой системы, одну переменную (потенциал) принимают равной произвольному числу, например 1 или 0, остальные определяются однозначно из системы (2.10). Для определения α_{ij} надо вычислить так называемую “косвенную стоимость” для свободных клеток,

$$c'_{ij} = v_j - u_i\,. \tag{2.11}$$

Тогда
$$\alpha_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}\,. \tag{2.12}$$

Об оптимальности распределения можно судить по величинам оценок α_{ij}.

Оценку α_{ij} можно трактовать как увеличение цены продукта при его перевозке из пункта i в пункт j. Если $\alpha_{ij}<0$, это означает, цена, предлагаемая потребителем, больше чем сумма цены поставщика и тарифа на перевозку, т.е. если бы эта клетка была занята, можно было бы получить дополнительный экономический эффект. Чтобы улучшить неоптимальный план ТЗ (на min), выбирается свободная клетка с отрицательной оценкой, если их несколько, выбирают клетку с наименьшей оценкой и для неё строят цикл. Передача поставок в одну из свободных клеток влечёт изменение поставок в некоторых заполненных клетках. В этом случае говорят о перераспределении поставок в цикле.

Циклом называется замкнутый многоугольник, сторонами которого являются горизонтальные и вертикальные отрезки. Одна вершина цикла совпадает со свободной клеткой, для которой строится цикл, остальные – с заполненными клетками. Некоторые возможные виды циклов на рис. 2.1.

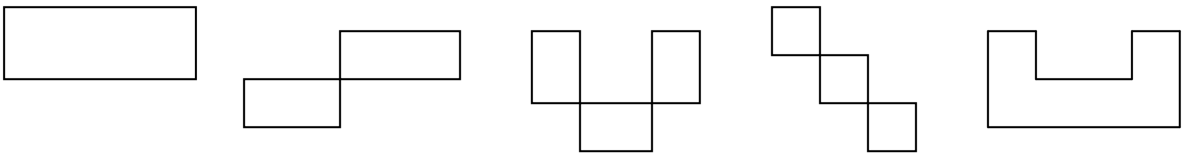


Рис 2.1.

Для проверки плана на оптимальность, составляют матрицу оценок для каждой пустой клетки таблицы. Если матрица оценок не содержит отрицательных (на min), положительных (на max), чисел, план оптимальный. Проверим план №2 задачи №2.1 на оптимальность методом потенциалов.

Решение. Поставим в соответствие поставщикам S_1 и S_2 потенциалы u_1 и u_2, а потребителям D_1, D_2 и D_3 – v_1, v_2 и v_3. Составляем систему для их определения:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 3, \\ u_1 + v_3 = 4, \\ u_2 + v_2 = 4, \\ u_2 + v_3 = 5. \end{cases} \qquad \begin{cases} \textit{Пусть}: u_1 = 0, \textit{тогда} \\ v_1 = 3, v_3 = 4, u_2 = 1, v_2 = 3. \end{cases}$$

Определяем косвенную стоимость: $c'_{12} = u_1 + v_2 = 3, c'_{21} = 1 + 3 = 4.$

Вычисляем оценки α_{ij}: $\alpha_{12} = c_{12} - c'_{12} = 6 - 3 = 3, \alpha_{21} = c_{21} - c'_{21} = 8 - 4 = 4.$

Так как $\alpha_{12} > 0$, $\alpha_{21} > 0$, то план №2 оптимальный.

$$\text{Min } F(X^*) = 1230 \text{ при плане } X^* = \begin{pmatrix} 80 & 0 & 20 \\ 0 & 90 & 110 \end{pmatrix}.$$

<u>*Распределительный метод*</u>. При распределительном методе решения ТЗ последовательно используются расчётные таблицы, соответствующие очередному шагу решения. Для проверки очередного плана на оптимальность последовательно вычисляют оценки всех свободных клеток до первой отрицательной (в задаче на min), положительной (в задаче на max), если таких нет – план оптимальный. Клетка, имеющая отрицательную оценку, является выгодной в смысле уменьшения целевой функции. Её следует запомнить, т.е. произвести перераспределение поставок в цикле, построенном для этой клетки. Оценка α_{ij} для построенного цикла равна разности между суммой затрат нечётных и чётных клеток. Нумерация клеток для определения чётных и нечётных начинается с клетки, для которой строится цикл (ей присваивается №1), а дальше нумерация ведётся продвижением по циклу то клетки к клетке в любом направлении стрелки. Проверим на оптимальность распределительным методом план №1 задачи №8.

Решение. Для клетки (1,3): α_{13} =4-5+4-6=-3; клетки (2,1): α_{21} =8-3+6-4=7.

Так как $\alpha_{13}<0$, план №1 не оптимальный. Делаем поставку в клетку (1,3) по циклу (рис.2.2). Получим новое распределение поставок в этом цикле (рис.2.3). X_{13}=min(20,130)=20. Полученный новый план совпадает с планом №2, который оптимальный. Min F(X)=F_1(X)-3·20=1290-60=1230.

20	
70	130

Рис.2.2.

	20
90	110

Рис.2.3.

2.3. Алгоритм решение транспортной задачи с помощью MS–Excel

Для практического решения ТЗ с помощью MS-Excel рассмотрим более сложный пример, на тему *«рациональных перевозок грузов».*

<u>*Задача №2.2.*</u> Пусть имеется 4 поставщика и 5 потребителей. Издержки перевозки единицы груза от i-го поставщика в j-й пункт назначения, запасы поставщиков и заказы потребителей даны в таблице 2.4. Оптимизировать план перевозок.

Таблица 2.4. Параметры задачи №2.2

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**	**Запасы**
A_1	13	7	14	7	5	**30**
A_2	11	8	12	6	8	**48**
A_3	6	10	10	8	11	**20**
A_4	14	8	10	10	15	**30**
Заказы	**18**	**27**	**42**	**26**	**15**	

Организуем данные так, как показано в таблице 2.5.

Таблица 2.5. Организация данных задачи №2.2 на листе MS-Excel

	A	B	C	D	E	F	G	I	J	K	L	M
1	Транспортная задача											
2	Транспортные издержки											
3		**B_1**	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**						
	A_1	13	7	14	7	5		=СуммПроизв(B4:F4;B11:F11)				
5	**A_2**	11	8	12	6	8						
6	**A_3**	6	10	10	8	11						
7	**A_4**	14	8	10	10	15						
8				**Суммарные издержки**				**=Сумм(14:17)**				
9		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Запасы**	**Ограничения**				
10	**A_1**	0	0	0	0	0	**30**	**=Сумм(B11:F11)-G11**				
11	**A_2**	0	0	0	0	0	**48**	**-48**				
12	**A_3**	0	0	0	0	0	**20**	**-20**			↓	
13	**A_4**	0	0	0	0	0	**30**	**-30**				
14	**Закаы**	**18**	**27**	**42**	**26**	**15**						
15	**Ограничения**	=Сумм(B11:B14)-B15				-15						

1. В ячейках I4-I7 стоят суммы произведений цены единицы груза на объём перевозок от i-го поставщика к любому потребителю.

В ячейке I8 сумма этих сумм (т.е. двойная сумма), это и есть целевая функция, минимум которой надо найти.

В ячейки I10:I13 внесены ограничения на количества груза, вывезённого от каждого поставщика, т.е. запасы.

В ячейки B14:F14 внесены ограничения на количества груза, необходимого потребителям, т.е. заказы.

2. Далее вызываем **“Поиск решения**”. а) Целевая ячейка: I8, - **Мин**;

б) Изменяя ячейки: B11:F14; с) Ограничения: B11:F14≥0 (перевозки не могут быть отрицательными), I10:I13=0 (ограничения на количества груза от каждого поставщика), B14:F14=0 (ограничения на количества груза каждому потребителю). При такой организации данных все перевозки окажутся целыми числами, если целыми являются числа в колонках “Запасы” и строке “Заказы”.

3. Надо проверить, чтобы в полученном решении было ровно m+n-1 ненулевых перевозок.

4. Отправить на решение. Целесообразно повторить расчёт задачи, максимизируя транспортные издержки, чтобы оценить отличие наилучшего варианта от наихудшего.

Ответ: F_{min}=980 (усл.ден.ед) при плане $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 12 & 10 & 26 & 0 \\ 18 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Итоговое распределение перевозок, а также значения “теневых цен”, соответствующие пустым клеткам, можно использовать при проведении анализа модели на чувствительность.

2.4. Исследование транспортной задачи на чувствительность

Теневая цена (оценки α_{ij} для незанятых клеток) показывает, на сколько увеличится общая стоимость перевозок, если в пустую клетку поместить одну единицу груза. Нулевое значение теневой цены указывает на существование альтернативного распределения перевозок, с такой же минимальной стоимостью.

Теневые цены можно использовать также в качестве индикаторов изменений стоимости перевозки грузов, соответствующей пустой клетке. Они оказывают воздействие на оптимальное распределение перевозок. Например, теневая цена клетки (2,1) в оптимальном плане α_{21}=4, а фактическая стоимость перевозки 8 ед. за одну единицу груза. Следовательно, чтобы использование этой клетки привело к снижению общей стоимости. Фактическую стоимость необходимо снизить на 8-4=4 ус.ед. Действия стоимостных изменений в заполненных клетках выявить сложнее. При снижении издержек увеличение количества грузов в такой клетке выгодно. Если же издержки, стоящие в заполненных клетках, возрастают, то при достижении ими определённого значения использование этой клетки является невыгодным, необходимо перейти к другому маршруту. На такие вопросы даёт ответ *“отчёт об устойчивости”,* который можно получить при решении ТЗ с помощью MS-Excel.

Рассмотрим отчёт об устойчивости для задачи №2.2 (табл. 2.6).

Таблица 2.6. Отчёт об устойчивости “Оптимальный план задачи №2.2”

Отчёт об устойчивости					
Оптимальный план задачи					
Изменяемые ячейки					
Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой коэффициент	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
A_1 B_1	0	6	13	-	6
A_1 B_2	15	0	7	2	2
A_1 B_3	0	3	14	-	3
A_1 B_4	0	2	7	-	2
A_1 B_5	15	0	5	2	-
A_2 B_1	0	3	11	-	3
A_2 B_2	12	0	8	2	2
A_2 B_3	10	0	12	3	2
A_2 B_4	26	0	6	2	-
A_2 B_5	0	2	8	-	2
A_3 B_1	18	0	6	3	-
A_3 B_2	0	4	10	-	4
A_3 B_3	2	0	10	4	2
A_3 B_4	0	4	8	-	4
A_3 B_5	0	7	11	-	7
A_4 B_1	0	8	14	-	8
A_4 B_2	0	2	8	-	2
A_4 B_3	30	0	10	2	-
A_4 B_4	0	6	10	-	6
A_4 B_5	0	11	15	-	11

Ограничения					
Имя	Результ. значение	Теневая цена	Ограничен. правая часть	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
A_1 огранич.	0	7	0	0	15
A_2 огранич.	0	8	0	0	12
A_3 огранич.	0	6	0	0	2
A_4 огранич.	0	6	0	0	12
B_1 огранич.	0	0	0	2	0
B_2 огранич.	0	0	0	0	-
B_3 огранич.	0	4	0	12	0
B_4 огранич.	0	-2	0	12	0
B_5 огранич.	0	-2	0	15	0

Рассмотрим заполненную клетку (2,4), фактическая стоимость перевозки в эту клетку составляет 6 ед. Уменьшение этой стоимости не повлияет на объём перевозок, так как количество груза, указанного в данной клетке удовлетворяет всю потребность B_4. Если стоимость перевозки станет больше 6, то следует обратить внимание на циклы, в которых задействована эта клетка. Эти циклы дают значения теневых цен для (1,4): $\alpha_{14}=c_{14}-c_{24}+c_{22}-c_{12}=7-6+8-7=2$;

для (3,4): $\alpha_{34}=c_{34}-c_{33}+c_{23}-c_{24}=8-10+12-6=4$;

для (4,4): $\alpha_{44}=c_{44}-c_{43}+c_{23}-c_{24}=10-10+8-6=2$.

Во всех циклах клетка (2,4) помечена знаком “-” и любое увеличение стоимости повлечёт за собой снижение теневых цен для указанных клеток. Изменение объёмов перевозок будет иметь место в случае, если единица стоимости транспортировки для клетки (2,4) возрастёт более чем на 2 единицы и превысит 8 ед. В этом случае теневая цена клеток (1,4) и (4,4) станет отрицательной, и тогда выгоднее будет использовать эти клетки, что приведёт к изменению плана перевозок. В отчёте об устойчивости столбец “Допустимое увеличение” для клетки A_2 B_4 указывает на цифру 2, в столбце “Допустимое уменьшение” стоит прочерк, т.е. уменьшение не влияет на оптимальный план.

Таким образом, для полученного оптимального распределения верхним пределом стоимости, соответствующей клетки (2,4) является значение 8 ед., а нижним пределом – 0. Внутри этого промежутка происходит изменение лишь общей стоимости перевозки грузов, а оптимальный план в натуральном выражении не меняется.

2.5. Осложнения транспортной задачи

Эффективные методы решения ТЗ применимы только при условии, что она сбалансирована, т.е. сумма запасов равна сумме заказов. На практике нередко встречаются случаи, когда условие баланса не выполняется, или сумма запасов превышает сумму заказов (излишки запасов) или, наоборот, сумма запасов меньше, чем сумма заказов (дефицит запасов).

В первом случае часть запасов, очевидно, должна остаться в складах поставщиков, и дополнительный вопрос при этом состоит в том, сколько грузов не вывозить (оставить на складе) у каждого поставщика. При этом сумма транспортных издержек при выполнении заказов потребителей была бы минимальной.

Во втором случае дополнительный вопрос состоит в том, чтобы распределить дефицит между потребителями. На практике этот случай сложнее для менеджера, отвечающего за доставку заказов потребителям. Придётся учитывать ценность каждого потребителя для поставщика. Если все потребители одинаково ценны, то этот случай с точки зрения оптимизации издержек мало, чем отличается от первого. Рассмотрим эти случаи.

1. Излишки запасов. В случае, когда $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, добавим в таблицу параметров задачи один лишний столбец. Это можно трактовать так, как если бы появился ещё один , фиктивный, потребитель. Заказ этого потребителя примем равным разности между суммой всех запасов и суммой всех заказов:

$$b_{fict} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (2.13)$$

Издержки перевозок грузов к нему от любого поставщика были равны 0. Допустим, что в задаче №2.1 производительность первого карьера не 100, а 150 грузовиков в день. Тогда задача становится несбалансированной: потребность заводов – 300 грузовиков, а карьеры могут добывать 350. В этом случае надо снизить добычу песка на каждом из карьеров. Вопрос: сколько грузовиков надо ежедневно не загружать на каждом из карьеров (табл.2.7)?

Таблица 2.7. Перевозки: фиктивный завод

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	D_{fict}	Запасы
S_1	3 X_{11}	6 X_{12}	4 X_{13}	0 X_{14}	150
S_2	8 X_{21}	4 X_{22}	5 X_{23}	0 X_{24}	200
Заказы	80	90	130	50	

Переменные X_{14} и X_{24} покажут, сколько грузовиков песка надо оставить (т.е. не отправлять на заводы, не добывать, хотя это и позволяют мощности карьеров) соответственно на первом и втором карьерах.

2. Дефицит запасов. В случае, когда $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ добавим в таблицу перевозок лишнюю строку. Это можно трактовать так, как если бы появился ещё один, фиктивный, поставщик. Запасы грузов для фиктивного поставщика примем равными:

$$a_{fikt} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i, \qquad (2.14)$$

а издержки перевозок грузов от него к любому потребителю были равны 0.

Пусть в нашей задаче №2.1 производительность второго карьера не 200, а 150 грузовиков в день. Тогда заводы будут испытывать дефицит: потребность заводов – 300 грузовиков с песком в день, а карьеры могут добывать 250. Надо распределить дефицит между заводами, т.е. ответить на вопрос, сколько грузовиков с песком не получит каждый завод, если поставщиков интересует только минимизация транспортных издержек? Составим таблицу 2.8.

Таблица 2.8. Перевозки: фиктивный карьер

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	Запасы
S_1	3 X_{11}	6 X_{12}	4 X_{13}	100
S_2	8 X_{21}	4 X_{22}	5 X_{23}	150
S_{fikt}	0 X_{31}	0 X_{32}	0 X_{33}	50
Заказы	80	90	130	

Запас груза у фиктивного поставщика равен: a_{fikt}=(80+90+130)-(100+150)=50. Тогда переменные X_{31}, X_{32} и X_{33} покажут, сколько грузовиков песка не получат соответственно 1, 2 и 3-й заводы.

Несбалансированные транспортные задачи можно решать, просто заменив в соответствующих ограничениях знаки равенства на знаки нестрогих неравенств. Но тогда для решения такой задачи надо применять методы ЗЛП, а не специфические “транспортные” алгоритмы.

3. Ещё одно возможное осложнение ТЗ – это *запрещённый маршрут*, т.е. запрещение определённой перевозки от i-го поставщика к j-му потребителю для составляемого плана перевозок (например, ремонт дороги, неплатежи и т.п.). В этом случае можно ввести ограничение $x_{ij}=0$, но чтобы сохранить форму ТЗ достаточно в таблице тарифов заменить c_{ij} на очень большое число, это называется *блокированием клетки* (i,j)). Фактически это будет означать, что перевозка по этому маршруту будет невыгодна.

4. Иногда требуется найти решение ТЗ при условии, что из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j должно быть завезено не менее заданного количества груза α_{ij} единиц. В этом случае считают, что запасы пункта A_i и потребности B_j меньше фактических на α_{ij} единиц. После этого находят оптимальный план ТЗ, на основании которого определяют решение исходной задачи.

5. Если дополнительным условием ТЗ является необходимость из A_i в пункт назначения B_j обязательно перевезти α_{ij} единиц груза, в клетку (i,j) записывают указанное число α_{ij} и в дальнейшем поступают как в пункте 3, т.е. блокируют данную клетку.

6. Если из пункта A_i в пункт назначения B_j требуется завезти не более α_{ij} единиц груза, в таблице исходных данных задачи для каждого j-го ограничения вводят дополнительный пункт назначения. В этом столбце записывают те же тарифы, что и в B_j , за исключением тарифа в i-ой строке. В ней тариф считают равным большому числу (т.е. блокируют клетку). Потребности пункта B_j равны α_{ij}, а потребности дополнительного пункта назначения равны (b_{ij}-α_{ij}).

Рассмотрим транспортную задачу *«с дополнительными ограничениями»*.

Задача №2.3. Решить ТЗ, исходные данные которой приведены в табл. 2.9, при дополнительных условиях: из A_1 в B_1 должно быть перевезено не менее 50 ед. груза, из A_3 в B_5 – не менее 60 ед. груза, а из A_2 в B_4 – не более 40 ед. груза. Минимизировать общие издержки.

Таблица 2.9.Основные параметры задачи №2.3

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	3	2	4	8	160
A_2	7	6	5	3	1	90
A_3	8	9	4	5	2	140
Потребности	90	60	80	70	90	390

Решение. Так как из A_1 и A_3 соответственно в B_1 и B_5 необходимо завезти не менее 50 и 60 ед. груза, запасы этих пунктов отправления и потребности назначения будем считать меньше соответственно на 50 и 60 ед. Кроме того, из A_2 в B_4 надо завезти не более 40 ед. груза. Введём дополнительный пункт потребления B_6 с потребностями, равными 70-40=30 ед., а потребности B_4 будут равны 40 ед. В столбце B_6 запишем тарифы столбца B_4, за исключением клетки (2,4). В ней тариф полагаем равным сколь угодно большому числу M, получим новую таблицу (табл.2.10). Решая ТЗ одним из методов, получим оптимальный план (табл.2.10).

Таблица 2.10. Параметры задачи №2.3 с учётом ограничений

Пункты назначения	Пункты потребления						Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	5 **20**	3 **60**	2 **30**	4	8	4	110
A_2	7 **20**	6	5	3 **40**	1 **30**	M	90
A_3	8	9	4 **50**	5	2	5 **30**	80
Потребности	40	60	80	40	30	30	280

Запишем оптимальное решение исходной задачи: X_{11}=20+50=70; X_{12}=60; X_{13}=30; X_{21}=20; X_{24}=40; X_{25}=30; X_{33}=50; X_{34}=30; X_{35}=60; min F(X)=1360ед.

Мини-кейс **“Подготовка к отопительному сезону”**

Задача №2.4. (На логистику). С угольных складов области УС1, УС2, УС3, УС4 поставляется уголь для отдельных потребителей. На завтра транспортная компания должна обеспечить заявки 10 потребителей C_j, j=1,10. В таблице 2.11 приведены издержки (тыс. руб.) по завозу угля в адрес этих потребителей в расчёте на одну машину, заказы потребителей (кол-во машин) и запасы угля у поставщиков на сегодня, т.к. эшелон с углём ожидается завтра. Диспетчера транспортной компании предупредили, что из-за ремонта моста перевозки к потребителю С3 со складов УС2 и УС3 невозможны. Требуется: 1) решить задачу с минимальными издержками, исходя только из интересов поставщика. Каковы ожидаемые издержки? 2) Сколько машин угля останется у каждого поставщика? 3) Есть ли у задачи альтернативное решение?

Таблица 2.11. Начальные данные задачи №2.4

	С1	С2	С3	С4	С5	С6	С7	С8	С9	С10	Запасы
УС1	3,1	18	7,5	17,6	9,3	14	9,7	14,5	8,1	14,1	4
УС2	3,8	6,8	М	8,3	17,3	12,3	16,3	5,2	5,1	13,9	11
УС3	9,6	5,6	М	16,8	8,5	10,4	11,2	8,2	8,3	18,9	17
УС4	12,5	16,2	6,6	16,5	14,9	3,4	5,6	14,2	11,3	17,4	20
Заказы	2	2	5	4	5	4	4	1	2	3	

Решение.. Переменные решения X_{ij} – количество машин угля, перевезённое от i - того поставщика j-му потребителю. Тогда целевая функция будет: Суммпроизв(B4:L7;B11:L14), в табл. 2.12 это ячейка E9.

Ограничения по строкам: Сумм(B11:L11)-M4=0, и т.д. – ячейки M11:M14.

Ограничения по столбцам: Сумм(B11:B14)-B8=0, и т.д. – ячейки B15:L15. Далее: “Поиск решения”; “Параметры”; “Выполнить”; “Результаты решения”; ”Отчёт об устойчивости”.

Результаты решения в табл.2.12.

Отчёт об устойчивости в табл. 2.13.

Таблица 2.12. Решение задачи №2.4 в MS-Excel

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Подготовка к отопительному сезону												
3	С1	С2	С3	С4	С5	С6	С7	С8	С9	С10	С11	Запасы
4. УС1	3,1	18	7,5	17,6	9,3	14	9,7	14,5	8,1	14,1	0	4
5. УС2	3,8	6,8	100	8,3	17,3	12,3	16,3	5,2	5,1	13,9	0	11
6. УС3	9,6	5,6	100	16,8	8,5	10,4	11,2	8,2	8,3	18,9	0	17
7. УС4	12,5	16,2	6,6	16,5	14,9	3,4	5,6	14,2	11,3	17,4	0	20
8.Заказы	2	2	5	4	5	4	4	1	2	3	20	
9.				219,2								
10.	С1	С2	С3	С4	С5	С6	С7	С8	С9	С10	С11	
11. УС1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
12. УС2	0	0	0	4	0	0	0	1	2	3	1	0
13. УС3	0	2	0	0	5	0	0	0	0	0	10	0
14. УС4	0	0	5	0	0	4	4	0	0	0	7	0
15.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Ответ: 1. Ожидаемые издержки равны – 219,2 тыс. руб.

2. У каждого из поставщиков останется соответственно: 2; 1; 10; 7 машин.

3. Альтернативного решения в задаче нет. Такой вывод можно сделать, посмотрев отчёт об устойчивости, в котором указаны нормированные стоимости. А это оценки незанятых клеток. Среди них нет нулевых оценок, т.е. нет других вариантов решения.

Таблица 2.13. Отчёт об устойчивости задачи №2.4

		Результ.	Нормир.	Целевой	Допустимое	Допустимое
Ячейка	Имя	значение	стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение
$B$11	УС1 С1	2	0	3,1	0,700000002	1E+30
$C$11	УС1 С2	0	12,4	18	1E+30	12,4
$D$11	УС1 С3	0	0,900000004	7,500000004	1E+30	0,900000004
$E$11	УС1 С4	0	9,300000001	17,6	1E+30	9,300000001
$F$11	УС1 С5	0	0,8	9,299999999	1E+30	0,8
$G$11	УС1 С6	0	10,6	14	1E+30	10,6
$H$11	УС1 С7	0	4,100000004	9,700000004	1E+30	4,100000004
$I$11	УС1 С8	0	9,300000003	14,5	1E+30	9,300000003
$J$11	УС1 С9	0	3,000000002	8,100000002	1E+30	3,000000002

$K$11	УС1 С10	0	0,199999998	14,1	1E+30	0,199999998
$L$11	УС1 С11	2	0	0	0,199999998	0,700000002
$B$12	УС2 С1	0	0,700000002	3,800000002	1E+30	0,700000002
$C$12	УС2 С2	0	1,2	6,8	1E+30	1,2
$D$12	УС2 С3	0	93,4	100	1E+30	93,4
$E$12	УС2 С4	4	0	8,3	8,200000004	1E+30
$F$12	УС2 С5	0	8,800000002	17,3	1E+30	8,800000002
$G$12	УС2 С6	0	8,900000003	12,3	1E+30	8,900000003
$H$12	УС2 С7	0	10,7	16,3	1E+30	10,7
$I$12	УС2 С8	1	0	5,2	3,000000002	1E+30
$J$12	УС2 С9	2	0	5,1	3,000000002	1E+30
$K$12	УС2 С10	3	0	13,9	0,199999998	1E+30
$L$12	УС2 С11	1	0	0	0,700000002	0,199999998
$B$13	УС3 С1	0	6,499999998	9,599999998	1E+30	6,499999998
$C$13	УС3 С2	2	0	5,6	1,2	1E+30
$D$13	УС3 С3	0	93,4	100	1E+30	93,4
$E$13	УС3 С4	0	8,500000003	16,8	1E+30	8,500000003
$F$13	УС3 С5	5	0	8,5	0,8	1E+30
$G$13	УС3 С6	0	7,000000002	10,4	1E+30	7,000000002
$H$13	УС3 С7	0	5,6	11,2	1E+30	5,6
$I$13	УС3 С8	0	3,000000002	8,200000002	1E+30	3,000000002
$J$13	УС3 С9	0	3,200000002	8,300000002	1E+30	3,200000002
$K$13	УС3 С10	0	5,000000003	18,9	1E+30	5,000000003
$L$13	УС3 С11	10	0	0	3,000000002	0,8
$B$14	УС4 С1	0	9,400000002	12,5	1E+30	9,400000002
$C$14	УС4 С2	0	10,6	16,2	1E+30	10,6
$D$14	УС4 С3	5	0	6,6	0,900000004	1E+30
$E$14	УС4 С4	0	8,200000004	16,5	1E+30	8,200000004
$F$14	УС4 С5	0	6,400000002	14,9	1E+30	6,400000002
$G$14	УС4 С6	4	0	3,4	7,000000002	1E+30
$H$14	УС4 С7	4	0	5,6	4,100000004	1E+30
$I$14	УС4 С8	0	9,000000001	14,2	1E+30	9,000000001
$J$14	УС4 С9	0	6,2	11,3	1E+30	6,2
$K$14	УС4 С10	0	3,499999999	17,4	1E+30	3,499999999
$L$14	УС4 С11	7	0	0	3,499999999	0,900000004

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$M$11	УС1	0	0	0	0	1E+30
$M$12	УС2	0	0	0	2	0
$M$13	УС3	0	0	0	2	0
$M$14	УС4	0	0	0	2	0
$B$15	С1	0	3,1	0	0	2
$C$15	С2	0	5,6	0	0	2
$D$15	С3	0	6,6	0	0	2
$E$15	С4	0	8,3	0	0	2
$F$15	С5	0	8,5	0	0	2
$G$15	С6	0	3,4	0	0	2
$H$15	С7	0	5,6	0	0	2
$I$15	С8	0	5,2	0	0	1
$J$15	С9	0	5,1	0	0	2
$K$15	С10	0	13,9	0	0	2
$L$15	С11	0	0	0	0	2

Мини-кейс "План перевозок транспортного отдела"

Задача №2.5. Менеджер транспортного отдела составляет план перевозок продукции фирмы в стандартных контейнерах на следующий месяц. Цены перевозок одного контейнера, величины заказов и количество контейнеров на складах заданы в табл. 2.14 и 2.15.

а) У него 9 заказов от потребителей D_1, D_2,…, D_9, причём суммарный заказ превышает количества контейнеров на складах фирмы S_1, S_2,…, S_7 (табл. 2.14). Найти план перевозок, минимизирующий транспортные издержки. Сколько контейнеров не получит в этом месяце каждый из потребителей, если исходить только из требования минимальных издержек?

б) У него 10 заказов от потребителей D_1, D_2,…, D_{10}, причём суммарный заказ меньше, чем количество контейнеров на складах фирмы S_1, S_2,…, S_4, так что часть продукции останется на складах (табл. 2.15). Найти план перевозок, минимизирующий транспортные издержки. Сколько контейнеров останется на каждом из складов фирмы в конце месяца?

Таблица 2.14. Данные задачи №2.5(а)

	D₁	**D₂**	**D₃**	**D₄**	**D₅**	**D₆**	**D₇**	**D₈**	**D₉**	**Запасы**
S_1	14	7	10	7	3	12	7	2	14	**7**
S_2	19	4	16	15	16	9	10	6	12	**10**
S_3	10	11	9	6	7	11	15	8	11	**12**
S_4	9	12	3	8	5	17	16	17	13	**8**
S_5	3	12	8	17	5	13	16	8	3	**2**
S_6	13	9	11	5	17	7	17	17	16	**5**
S_7	3	6	10	18	14	12	8	9	7	**6**
Заказы	**5**	**11**	**5**	**9**	**3**	**6**	**9**	**4**	**8**	

Таблица 2.15. Данные задачи №2.5(б)

	D_1	**D_2**	**D_3**	**D_4**	**D_5**	**D_6**	**D_7**	**D_8**	**D_9**	**D_{10}**	**Запасы**
S_1	3	17	7	17	9	14	9	14	8	14	**4**
S_2	3	6	6	8	17	12	16	5	5	13	**11**
S_3	9	5	6	16	8	10	11	8	8	18	**17**
S_4	12	16	6	16	14	3	5	14	11	17	**20**
Заказы	**2**	**2**	**5**	**4**	**5**	**4**	**4**	**1**	**2**	**3**	

Решение.. Составим математическую модель задачи и решим с помощью MS-Excel. Переменные решения X_{ij} – количество контейнеров, перевозимых со складов фирмы потребителям. Так как баланс не выполняется, вводим в а) фиктивный склад, а в б) фиктивного потребителя. Оформляем таблицы также, как в задаче №2.4. "Поиск решения" выдаст следующий ответ.

Ответ: а) Минимальные издержки F=248 усл. ден. ед. План перевозок (табл.2.16).

Таблица 2.16. Ответ задачи №2.5(а)

План перевозок транспортного отдела										
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	
S1	14	7	10	7	3	12	7	2	14	29
S2	10	4	16	15	16	9	10	6	12	40
S3	10	11	9	6	7	11	15	8	11	87
S4	9	12	3	8	5	17	16	17	13	30
S5	3	12	8	17	5	13	16	8	3	6
S6	13	9	11	5	17	7	17	17	16	35

S7	3	6	10	18	14	12	8	9	7	21
Sfict	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
									248	
Переменные										
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	Запас
S1	0	0	0	0	0	0	3	4	0	7
S2	0	10	0	0	0	0	0	0	0	10
S3	0	0	0	9	0	0	0	0	3	12
S4	0	0	5	0	3	0	0	0	0	8
S5	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
S6	0	0	0	0	0	5	0	0	0	5
S7	5	1	0	0	0	0	0	0	0	6
Sfict	0	0	0	0	0	1	6	0	3	10
Цель	F=	248								
Заказ	5	11	5	9	3	6	9	4	8	
Огранич.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Потребители D_7 и D_9 не получат соответственно 6 и 4 контейнера.

б) Минимальные издержки F=204 усл.ден.ед. План перевозок (табл.2.17).

Таблица 2.17. Ответ задачи №2.5(б)

План перевозок транспортного отдела													
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	Df		
S1	3	17	7	17	9	14	9	14	8	14	0		
S2	3	6	6	8	17	12	16	5	5	13	0		
S3	9	5	6	16	8	10	11	8	8	18	0		
S4	12	16	6	16	14	3	5	14	11	17	0		
Переменные													
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	Df	Запас	Издерж
S1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	4	3
S2	1	0	0	4	0	0	0	1	2	3	0	11	89
S3	0	2	0	0	5	0	0	0	0	0	10	17	50
S4	0	0	5	0	0	4	4	0	0	0	7	20	62
Заказ	2	2	5	4	5	4	4	1	2	3	20		
Издержки												204	
Огранич.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		

На складах S_1, S_3 и S_4 останется соответственно 3, 10 и 7 контейнеров.

Многопродуктовая ТЗ

В обычных транспортных задачах речь идёт о перевозках какого-то одного груза. В многопродуктовых задачах рассматриваются перевозки грузов сразу нескольких типов. Это больше соответствует реальной ситуации. Рассмотрим такую задачу.

Мини-кейс "Поставка двух видов продуктов"

Задача №2.6. Менеджер отдела логистики составляет план перевозок двух видов продукции (A и B) фирмы с трёх её баз к четырём клиентам. Стоимость перевозок для каждого вида продукции, объём заказов и наличие запасов заданы в табл. 2.18. Составить план перевозок, минимизирующий транспортные издержки.

Таблица 2.18. Начальные данные задачи №2.6

		Клиент X		**Клиент Y**		**Клиент Z**		**Клиент W**		**Запасы**
		A	B	A	B	A	B	A	B	
База 1	A	595		480		455		430		**21**

	В		780		665		640		815	**21**
База 2	А	435		530		480		485		**33**
	В		735		735		680		585	**42**
База 3	А	545		465		525		440		**17**
	В		715		755		815		795	**57**
Заказы		**15**	**20**	**22**	**26**	**12**	**22**	**32**	**42**	

Решение задачи. Можно использовать два подхода. 1. Разделить задачу на две, по числу продуктов и решать каждую задачу обычным способом. 2. Получение решения в одной задаче, если перевозки разных грузов будут увязаны друг с другом. Будем решать задачу целиком. Вначале проверим баланс. Общее количество груза в запасах 191 ед., общее количество заказов – 191 ед., т.е. общий баланс есть. Но в задаче два вида грузов и общий баланс может не отражать балансов отдельных продуктов. Проверяем баланс по каждому продукту отдельно. Задача несбалансированна по обоим продуктам: продукта А имеется в запасах 71 ед., а заказано 81 ед., продукта В в запасах 120 ед., а заказано 110 ед. Задачу надо сбалансировать, для этого добавим фиктивного поставщика с запасом продукта А в 10 ед. и дополнительного клиента, который закажет оставшиеся 10 ед. Получим табл.2.19. Дальнейшее решение в MS-Excel. Чтобы запретить перевозки по ненужным маршрутам, поставим в соответствующие клетки высокую цену (9999).

Таблица 2.19. Решение задачи №2.6 в MS-Excel

		X		Y		Z		W		F	Запасы
		A	B	A	B	A	B	A	B	B	
База 1	A	595	9999	480	9999	450	9999	430	9999	0	21
	B	9999	780	9999	665	9999	640	9999	815	0	21
База 2	A	435	9999	530	9999	480	9999	485	9999	0	33
	B	9999	735	9999	735	9999	680	9999	585	0	42
База 3	A	545	9999	465	9999	525	9999	440	9999	0	17
	B	9999	715	9999	755	9999	815	9999	795	0	57
База f	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
Заказы		15	20	22	26	12	22	32	42	10	104760
										P=	104760
		A	B	A	B	A	B	A	B	B	Запасы
База 1	A	0	0	0	0	0	0	21	0	0	0
	B	0	0	0	0	0	21	0	0	0	0
База 2	A	15	0	0	0	12	0	6	0	0	0
	B	0	0	0	0	0	0	0	42	0	0
База 3	A	0	0	12	0	0	0	5	0	0	0
	B	0	20	0	26	0	1	0	0	10	0
База f	A	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0
Заказы		0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Минимальная общая стоимость перевозок составит 104760 руб.

Чтобы проверить, насколько полученный план лучше, чем другие возможные планы, можно найти максимум издержек. При этом, там где блокировали клетки, надо поставить низкие цены. “Поиск решения” выдаст результат: суммарная максимальная стоимость возрастёт до 122930 руб. Таким образом, наихудший план отличается от лучшего плана меньше чем на 20%, что даёт свободу выбора среди возможных планов перевозок.

2.6. Задача о назначениях

С математической точки зрения задача о назначениях (ЗОН) – это частный случай ТЗ, в которой число поставщиков равно числу потребителей. Например, число рабочих (поставщиков рабочей силы) и число работ (потребителей). Поэтому таблица "транспортных издержек" (аналогом которых может быть любая мера эффективности выполнения той или иной операции данным работником) должна быть квадратной.

Вторым отличием задачи о назначениях от ТЗ является то, что в первой от каждого поставщика к каждому потребителю поставляется одна единица груза (только одного рабочего можно назначить для выполнения определённой работы) или ни одной. Поэтому все запасы и заказы равны 1.

Понятно, что все переменные решения в задаче о назначениях могут принимать только значения 1 или 0.

Важное понятие, которое применяется в задачах о назначениях, есть понятие *системы различных представителей*. Рассмотрим пять множеств $S_1=\{2,3\}$; $S_2=\{1,2,4\}$; $S_3=\{1,2,5\}$; $S_4=\{3,4,5\}$; $S_5=\{3,4,5\}$. Эти множества являются подмножествами множества $S=\{1,2,3,4,5\}$. Требуется выбрать такие различные числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, что $x_i \in S_i$, i=1,2,3,4,5. Для данного примера: $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=5$, $x_4=3$, $x_5=4$. Однако если взять множества $T_1=(1,2)$; $T_2=(1,2)$; $T_3=(1,2)$; $T_4=(3,4,5)$; $T_5=(3,4,5)$, то такой выбор оказывается невозможным.

Определение. Пусть S_1, S_2 , … S_n являются подмножествами множества $S=\{1,2,\ldots,n\}$. Говорят, что множества S_1, S_2 , … S_n имеют *систему различных представителей*, если для всех i=1,2,…,n существуют различные $x_i \in S_i$.

Постановка задачи о назначениях. Существует много различных задач, укладывающихся в рамки ЗОН. Классический вариант задачи связан с распределением исполнителей по видам работ. Например:

Задача №2.7. Четыре человека P_1, P_2, P_3, P_4 должны выполнить четыре задания Z_1, Z_2, Z_3, Z_4. В силу разной квалификации на выполнение заданий им потребуется различное время. Как следует распределить людей по заданиям, чтобы минимизировать общее время выполнения? Квалификация исполнителей задаётся матрицей $A(a_{ij})$.

$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 9 \\ 5 & 5 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$. Распределение людей по заданиям обозначают перестановкой, например $\Pi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Так в нашем примере П(2)=4, это означает, что 2-ой человек будет выполнять 4-е задание и т.д.

Как и при решении ТЗ, составим таблицу параметров (табл. 2.20).

Таблица 2.20. Параметры задачи №2.7

Работы	Работники			
	A	**B**	**C**	**D**
1	3	4	5	1

2	1	4	3	9
3	5	5	2	5
4	6	4	5	5

Составляем таблицу переменных решения, которых в этой задаче будет 16. Каждая переменная может принять только два значения: 1 или 0, что будет означать соответственно, что данный рабочий назначен или не назначен на данное задание. Очевидно, что в каждой строчке и в каждом столбце может быть только одна переменная решения, равная единице, а остальные должны быть равны нулю.

Целевая функция, как и в ТЗ, представляет собой двойную сумму произведений переменных решения x_{ij} на время выполнения каждого задания, которую обозначим c_{ij}.

$$F = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij} \cdot x_{ij}. \qquad (2.15)$$

Ограничения обусловлены основным требованием задачи о том, что каждый рабочий должен выполнять одно и только одно задание и каждое задание должно быть назначено одному, и только одному, рабочему. Т.е.

$$\begin{cases} x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} = 1, \rightarrow i = 1,2,3,4; \\ x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j} = 1, \rightarrow j = 1,2,3,4; \\ x_{ij} \ge 0. \end{cases} \qquad (2.16)$$

Любая задача о назначениях может быть решена с использованием методов ЛП или алгоритма решения ТЗ. Но ввиду особой структуры задачи о назначениях, для неё разработан специальный алгоритм, получивший название “Венгерский метод”.

Алгоритм “Венгерского метода” решения ЗОН. Рассмотрим задачу минимизации целевой функции. Сущность ”Венгерского метода” заключается в приведении матрицы (таблицы) к виду, пока каждая строка и каждый столбец будут содержать ровно один отмеченный нуль. Каждый из отмеченных нулей указывает прикрепление рабочего к конкретной работе. Алгоритм решения ЗОН состоит из трёх этапов: 1. Формализация проблемы в виде таблицы;
2. Получение допустимого решения задачи;
3. Получение оптимального решения.

1. Пусть задана матрица квалификаций A(a_{ij}): а) В каждой строке матрицы задачи находим минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов строки;

б) В каждом столбце полученной матрицы находим минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов столбца. Теперь в каждой строке и в каждом столбце матрицы есть, по крайней мере, один нулевой элемент.

2. Некоторое решение является допустимым, если каждой строке и каждому столбцу соответствует только один элемент. Процесс распределения элементов осуществляется только в клетки с нулевой стоимостью:

в) Находим строку, содержащую только одно нулевое значение, и в эту клетку делаем назначение. Этот нуль заключаем в квадрат. В столбце, где находится отмеченный нуль, все остальные нули зачёркиваются и в дальнейшем не рассматриваются. Этот шаг продолжаем, пока возможно. Если на данном этапе окажется, что есть несколько нулей, которым не соответствуют назначения и которые не зачёркнутые, то:

г) Находим столбец с одним нулём и делаем в соответствующую клетку назначение, т.е. этот нуль отмечаем (заключаем в квадрат). В строке, где находится отмеченный нуль, все остальные нули зачёркиваем. Этот шаг продолжаем, пока возможно;

д) Если после шагов “в” и “г” ещё есть неотмеченные нули, то отмечаем любой из них, а в строке и столбце, где находится этот отмеченный нуль, все остальные нули зачёркиваем.

3. Если каждая строка, и каждый столбец матрицы содержат ровно один отмеченный нуль, то получено оптимальное решение. В противном случае переходим к третьему этапу:

е) Проводим минимальное число горизонтальных и вертикальных прямых через все отмеченные нули.

ж) Находим наименьший среди элементов, через которые не проходит ни одна из проведённых прямых, вычитаем его из всех незачёркнутых чисел и прибавляем ко всем числам, находящимся на пересечении прямых. Все элементы матрицы, через которые проходит только одна прямая, оставляем без изменения. В результате этого шага в матрице появляется, по крайней мере, один новый нуль.

З) К полученной матрице применяем вышеприведённый алгоритм, начиная с шага “в”. Если решение является допустимым, т.е. все элементы распределены в клетки, которым соответствует нулевая стоимость, то полученное решение одновременно является и оптимальным. *«о рациональном прикреплении торговых точек к продовольственным базам».*

<u>*Задача 2.8.*</u> “*О рациональном прикреплении торговых точек к продовольственным базам”*. Существуют четыре базы A_1, A_2, A_3, A_4 и четыре торговые точки B_1, B_2, B_3, B_4. Расстояния от баз до торговых точек заданы матрицей A_1:

$$A_1=\begin{pmatrix} 10 & 20 & 12 & 5 \\ 3 & 14 & 9 & 1 \\ 13 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 15 & 8 & 10 \end{pmatrix}. \qquad A_2=\begin{pmatrix} 5 & 15 & 7 & 0 \\ 2 & 13 & 8 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Надо так прикрепить базы к торговым точкам, чтобы суммарное расстояние было минимальным. Для решения используем алгоритм *венгерского метода*.

1. Находим минимальные элементы для каждой строки матрицы. Для первой – это 5, для второй – 1, для третьей – 6, для четвёртой – 7. Вычитаем эти числа из всех элементов соответствующих строк, получим матрицу A_2:

2. В полученной матрице находим минимальные элементы столбцов. Это: в первом -0; во втором – 2; в третьем – 0; в четвёртом – 0. Вычитаем их из всех элементов соответствующих столбцов, получим матрицу A_3:

$$A_3=\begin{pmatrix} 5 & 13 & 7 & 0 \\ 2 & 11 & 8 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \qquad A_4=\begin{pmatrix} 5 & 13 & 7 & 0 \\ 2 & 11 & 8 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Находим строки с одним нулём и делаем в эти клетки назначения. Это первая строка, клетка (1,4) и последняя строка, клетка (4,1). Эти нули заключаем в квадрат, одновременно вычёркиваем остальные нули в четвёртом и первом столбцах, если таковые имеются. Такой нуль один, в клетке (2,4). Больше нет строк с одним нулём, зато есть столбцы с одним нулём.

4. Отмечаем нуль во втором столбце, т.е. делаем назначение в клетку (3,2). В третьей строке вычёркиваем нуль, стоящий в клетке (3,3). Получим матрицу A_4, в которой больше нет нулей. Полученное распределение не является оптимальным, так как во второй строке нет отмеченных нулей.

5. Проводим минимальное число пересекающихся горизонтальных и вертикальных прямых, через все отмеченные нули. Одной или двух прямых здесь недостаточно, надо провести три прямые. Можно применять любой способ проведения прямых линий. Получим матрицу A_4:

$$A_5=\begin{pmatrix} 6 & 14 & 7 & 0 \\ 2 & 11 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_6=\begin{pmatrix} 6 & 14 & 7 & 0 \\ 2 & 11 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Среди не зачёркнутых этими прямыми чисел находим минимум: min(8,3,1,3)=1.Этот минимум вычитается из всех, не зачёркнутых, чисел и прибавляется ко всем числам на пересечении прямых. Это 5 и 13. Получим матрицу A_5. Полученное распределение не является оптимальным, т.к. в 3-м столбце нет отмеченных нулей. Проводим прямые, получим матрицу A_6. Минимальное число, среди не зачёркнутых чисел, равно min(7,2,2)=2. Этот минимум вычитаем из всех, не зачёркнутых, чисел и прибавляем ко всем числам на пересечении прямых (6, 14). Получим матрицу A_7.

$$A_7=\begin{pmatrix} 8 & 16 & 7 & 0 \\ 2 & 11 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_8=\begin{pmatrix} 13 & 21 & 7 & 0 \\ 2 & 11 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

К этой матрице применим вышеприведённый алгоритм. Полученное распределение не является оптимальным. Проводим прямые. Min(5)=5. Получим матрицу A_8. К матрице A_8 применим вышеприведённый алгоритм. В каждой строке и каждом столбце матрицы ровно один отмеченный нуль. Это оптимальное распределение. Возможно, оно не является единственным.

Ответ: A_1 прикрепляется к B_4, A_2 – к B_3, A_3 – B_2, A_4 – к B_1.Чтобы найти суммарное расстояние, надо сложить числа, которые расположены в исходной матрице на месте отмеченных нулей: 5+9+8+7=29.

Максимизация целевой функции. Случай максимизации целевой функции сводится к задаче минимизации для матрицы, полученной из исходной матрицы умножением каждого элемента на (-1). Рассмотрим пример для решения ЗОН с помощью MS-Excel.

Мини-кейс “Продажа оборудования для компьютерных сетей”

<u>Задача №2.9</u>. Фирма продаёт оборудование для компьютерных сетей, имеет 10 специалистов по маркетингу и 10 техников-программистов, которых необходимо объединить в пары (техник – менеджер по маркетингу) – команды по продаже оборудования. Менеджер по работе с персоналом провёл среди них тест на совместимость и определил индекс взаимной несовместимости между i-м техником и j-м менеджером. Индекс изменяется от 1 (дружеские отношения) до 20 (выраженная враждебность). Результаты представлены в табл. 2.21.

Таблица 2.21. Начальные данные задачи №2.9 (индексы несовместимости)

Менеджер по маркет.	Техники									
	Ваня	**Петя**	**Миша**	**Коля**	**Вася**	**Рома**	**Майя**	**Витя**	**Инна**	**Гена**
Аня	11	8	15	3	9	17	14	6	12	2
Зоя	7	4	13	11	19	2	10	5	18	9
Маша	13	20	19	12	14	11	16	9	15	14
Виталий	5	8	12	6	1	3	4	7	10	12
Люба	16	7	18	9	13	1	2	17	12	3
Даша	12	3	11	17	5	6	18	2	1	4
Руслан	9	1	20	4	7	20	19	1	19	16
Валя	8	6	17	8	11	4	3	4	13	16
Юля	17	2	19	13	14	19	11	3	17	1
Галя	12	1	20	1	2	5	6	4	1	13

Организуем данные (табл. 2.22).

Таблица 2.22. Организация данных на листе MS-Excel для задачи №2.9

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1																
2	Менед. по марк.	Техники														
3		**Ваня**	**Петя**	**Миша**	**Коля**	**Вася**	**Рома**	**Майя**	**Витя**	**Инна**	**Гена**					
4	**Аня**	11	8	15	3	9	17	14	6	12	2	**=Суммпроиз (B4:K4;B17:K17)**				
5	**Зоя**	7	4	13	11	19	2	10	5	18	9		0			
6	**Маша**	13	20	19	12	14	11	16	9	15	14		0			
7	**Виталий**	5	8	12	6	1	3	4	7	10	12		0			
8	**Люба**	16	7	18	9	13	1	2	17	12	3		0			
9	**Даша**	12	3	11	17	5	6	18	2	1	4		0			
10	**Руслан**	9	1	20	4	7	20	19	1	19	16		0			
11	**Валя**	8	6	17	8	11	4	3	4	13	16		0			
12	**Юля**	17	2	19	13	14	19	11	3	17	1		0			
13	**Галя**	12	1	20	1	2	5	6	4	1	13		0			
14										Индекс=		**=Сумм(M4:M13)**				
15	Менедж	Техники										Запас	Ограничен.			
16		**Ваня**	**Петя**	**Миш**	**Коля**	**Вася**	**Рома**	**Майя**	**Витя**	**Инна**	**Гена**					
17	**Аня**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	**=Сумм(B17:K17)-L17**			
18	**Зоя**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1			
19	**Маша**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1			
20	**Виталий**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1			

21	**Люба**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1			
22	**Даша**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1			
23	**Руслан**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1			
24	**Валя**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1			
25	**Юля**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1			
26	**Галя**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1			
27	Заказы	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
28	Огранич-я	**=Сумм(B17:B26)-B27**					-1	-1	-1	-1	-1					

2. Целевая функция вычисляется как сумма сумм произведений строки с индексами несовместимости и строки переменных решения. При этом не трудно понять, что каждая такая сумма есть индекс образованной команды. Так как в строке переменных все числа равны нулю, кроме одного, которое стоит на пересечении строки с именем менеджера и столбца с именем техника. Это число равно 1 и оно указывает на то, что команда сформирована именно из этих двух участников.

3. Вызываем “Поиск решения”. Все переменные окажутся равными 0 или 1. Требовать явно, чтобы все переменные были целыми и меньшими или равными 1, не обязательно, т.к. при решении ТЗ и ЗОН с помощью MS-Excel, “Поиск решения” автоматически выберет специальные, эффективные алгоритмы решения и обеспечит его целочисленность. Решение задачи показано в таблице 2.23.

Таблица 2.23. Результаты решения задачи №2.9

Менедж	Техники													
	Ваня	**Петя**	**Миша**	**Коля**	**Вася**	**Рома**	**Майя**	**Витя**	**Инна**	**Гена**				
Аня	11	8	15	3	9	17	14	6	12	2		2	2	3
Зоя	7	4	13	11	19	2	10	5	18	9		13	7	7
Маша	13	20	19	12	14	11	16	9	15	14		13	19	9
Виталий	5	8	12	6	1	3	4	7	10	12		1	1	1
Люба	16	7	18	9	13	1	2	17	12	3		1	1	1
Даша	12	3	11	17	5	6	18	2	1	4		1	1	11
Руслан	9	1	20	4	7	20	19	1	19	16		1	1	1
Валя	8	6	17	8	11	4	3	4	13	16		3	3	3
Юля	17	2	19	13	14	19	11	3	17	1		2	2	1
Галя	12	1	20	1	2	5	6	4	1	13		1	1	1
										Индекс=		**38**	**38**	**38**
Менедж.	Техники													
	Ваня	**Петя**	**Миша**	**Коля**	**Вася**	**Рома**	**Майя**	**Витя**	**Инна**	**Гена**	Запасы		Огранич.	
Аня	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**		1		0
Зоя	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0		1		0
Маша	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1		0
Виталий	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0		1		0
Люба	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0		1		0
Даша	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0		1		0
Руслан	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0		1		0
Валя	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0		1		0
Юля	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0		1		0
Галя	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0		1		0
Заказы	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1				

Огранич.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				

В данной задаче различным наборам переменных отвечает одно и то же значение целевой функции (38). Такое решение в математике называется “вырожденным”. В таблице 2.23 показаны три различных набора индексов сформированных команд. Матрица формирования пар дана только для первого варианта. Получить другие решения можно, повторно запуская “Поиск решения”. Очевидно, лучший вариант – третий, т.к. в этом решении нет совсем уж плохих команд. Наихудший индекс – 11, в то время как для решений, показанных в первых двух столбцах, есть команды с индексами 13 и 19. Наличие альтернативных решений даёт возможность выбрать из них наилучшее решение с точки зрения факторов, оставшихся неформализованными. Например, в нашей задаче минимальный индекс у техника Миши равен 11. Он может более или менее уживаться с менеджером Дашей. Значит, надо либо уволить, либо согласиться с этой парой, индекс которой не может быть меньше 11. Но введение дополнительного ограничения приводит ЗОН к обычной ЗЛП, для которой специализированные методы решения ТЗ неприменимы. Мы можем получить не целочисленные ответы. Можно потребовать, чтобы все переменные решения были целыми, в этом случае процесс решения занимает больше времени.

Вывод: Введение в ТЗ и ЗОН дополнительных ограничений приводит к тому, что особые методы решения таких задач перестают быть применимы. В этом случае задача будет решаться с помощью общих алгоритмов решения ЗЛП. Помимо того, что эти методы менее эффективны, они не гарантируют целочисленного решения, которое обычно предполагается в ТЗ и ЗОН. Поэтому не стоит усложнять модель, лучше в наиболее простой модели попытаться получить не одно, а множество альтернативных оптимальных решений и выбрать из них наилучшее. Рассмотрим ещё одну задачу о назначении и отборе.

Мини-кейс “Запасная бригада”. Несбалансированная задача о назначениях

Задача №2.10. Мастер должен набрать из 14 рабочих бригаду в 4 человека для выполнения срочного заказа. Среднее время (в мин), которое каждый из 14 рабочих тратит на ту или иную операцию (O1, O2, O3, O4), необходимую для выполнения заказа, известно (табл. 2.24). Размер заказа – 100ед., т.е. в реальности каждая операция будет выполняться 100 раз. В задаче требуется: а) определить способ оптимального распределения рабочих по операциям. Каково суммарное время, затрачиваемое 4 рабочими на 4 операции? б) Набрать запасную бригаду из 4 человек на случай, если заказ будет удвоен. Представить списки бригад. Сколько времени тратит на 4 операции вторая бригада? в) Можно ли при этом выполнить заказ в 10 рабочих дней (рабочая смена равна 8 часам)?

Таблица 2.24. Начальные данные задачи №2.10

Время	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14
O1	48	32	53	55	55	41	39	31	44	48	24	43	31	32
O2	41	51	48	52	22	51	32	31	59	59	60	24	22	58
O3	43	21	22	35	58	22	45	53	56	30	47	24	32	59
O4	32	50	37	58	35	44	46	53	29	41	21	52	35	36

Решение задачи. Так как задача не сбалансирована, операций 4, а рабочих 14, введём фиктивную дополнительную операцию O5 - другие рабочие. На эту операцию назначим 10 (14-4) рабочих, оставшихся в стороне от заказа. В задаче 14·5=70 переменных. Время фиктивной операции равно 0. Решать задачу будем с помощью MS-Excel. Оформим данные следующим образом (табл. 2.25).

В ячейках G2:G15 рассчитано время выполнения одной назначенной операции каждым рабочим. В ячейке G16: “=Сумм(G2:G15)” (суммарное время) - целевая функция. Для ответов на вопросы задачи надо подсчитать рабочее время, требующееся с учётом, что все операции надо выполнить 100 раз. В A35 записана формула расчёта полного рабочего времени в часах ”=G16*100/60”. В ячейках H18:H31 по формуле: “=G2*100/60/8” (протягивают вниз) подсчитывают количество смен, которое необходимо отработать каждому рабочему. Это время может быть различным, выбирают максимальное из них. В H32 помещена формула: “=Max(H2:H15)”. Чтобы использовать “Поиск решения” надо рассчитать количество назначений и операций. Для контроля числа назначений на операции в F33 вводят формулу “=Сумм(F19:F32)-F34” и протягивают её влево. Необходимое количество рабочих указано в строке B34:F34. Для контроля числа назначений рабочих вводят формулу в G19: “=Сумм(B19:F19)”, которую протягивают вниз. Теперь можно ставить задачу “Поиск решения”.

Таблица 2.25. Решение задачи №2.10 в MS-Excel

Запасная бригада								
A	B	C	D	E	F	G	H	
	O1	**O2**	**O3**	**O4**	**O5**			
P1	48	41	43	32	0	0		
P2	32	51	21	50	0	21		
P3	53	48	22	37	0	0		
P4	55	52	35	58	0	0		
P5	55	22	58	35	0	2E-10		
P6	41	51	22	44	0	1E-10		
P7	39	32	45	46	0	0		
P8	31	31	53	53	0	31		
P9	44	59	56	29	0	1,32E-10		
P10	48	59	30	41	0	0		
P11	24	60	47	21	0	21		
P12	43	24	24	52	0	0		
P13	31	22	32	35	0	22		
P14	32	58	59	36	0	0		
	Цель=	**95**						
	0	0	0	0	0			
P1	0	0	0	0	1	1	0	
P2	0	0	1	0	0	1	4,375	
P3	0	0	0	0	1	1	0	
P4	0	0	0	0	1	1	0	
P5	0	0	0	0	1	1	4,17E-11	
P6	0	0	0	0	1	1	2,09E-11	
P7	0	0	0	0	1	1	0	
P8	1	0	0	0	0	1	6,458333	
P9	0	0	0	0	1	1	2,75E-11	
P10	0	0	0	0	1	1	0	

P11	0	0	0	1	0	1	4,375	
P12	0	0	0	0	1	1	0	
P13	0	1	0	0	0	1	4,583333	
P14	0	0	0	0	1	1	0	**6,4583**
	0	0	0	0	0		0	
	1	1	1	1	10			
Всего рабочих часов		**158,333**						

Ответ: В итоговой табл. 2.26 оставлены только рабочие, назначенные в бригаду. При этом на 1 ед. в заказе будет израсходовано 95 мин рабочего времени или 1час 35мин. Длительность исполнения заказа составит 6,45 (меньше 7 дней). Общие трудозатраты составят 158,3 час.

Таблица 2.26. Первая бригада

	O1	O2	O3	O4	Другие рабочие		Рабочие дни
P2	0	0	**1**	0		1	21·100/60/8=4,37
P5	0	**1**	0	0		1	22·100/60/8=4,58
P11	0	0	0	**1**		1	21·100/60/8=4,37
P13	**1**	0	0	0		1	31·100/60/8=6,45
	1	1	1	1	10		
Всего рабоч. времени	95·100/60=**158,3**						Max **6,45**

Чтобы сформировать запасную бригаду, нужно из таблицы 2.24 исключить рабочих 2, 5, 11 и 13. Тогда останется 10 рабочих. В столбец “Другие рабочие” надо внести цифру 10-4=6 и запустить на решение. Результаты в табл. 2.27.

Таблица 2.27. Решение задачи №18 “Запасная бригада”

Запасная бригада							
A	B	C	D	E	F	G	H
	O1	O2	O3	O4	O5		
P1	48	41	43	32	0	0	
P3	53	48	22	37	0	0	
P4	55	52	35	58	0	0	
P6	41	51	22	44	0	22	
P7	39	32	45	46	0	0	
P8	31	31	53	53	0	31	
P9	44	59	56	29	0	29	
P10	48	59	30	41	0	0	
P12	43	24	24	52	0	24	
P14	32	58	59	36	0	0	
	Цель=	106					
	0	0	0	0	0		
P1	0	0	0	0	1	1	0
P3	0	0	0	0	1	1	0
P4	0	0	0	0	1	1	0
P6	0	0	1	0	0	1	4,583333
P7	0	0	0	0	1	1	0
P8	1	0	0	0	0	1	6,458333
P9	0	0	0	1	0	1	6,041667

P10	0	0	0	0	1	1	0	
P12	0	1	0	0	0	1	5	
P14	0	0	0	0	1	1	0	6,458333
	0	0	0	0	0		0	
	1	1	1	1	6			
Всего рабочих часов			176,6667					

Таблица 2.28. Ответ задачи №2.10 “Запасная бригада”

	O1	O2	O3	O4	Другие рабочие		Рабочие дни
P6	0	0	**1**	0		1	4,583
P8	**1**	0	0	0		1	6,458
P9	0	0	0	**1**		1	6,041
P12	0	**1**	0	0		1	5
	1	1	1	1	6		
Всего рабочего времени	106·100/60=**176,66**						Max **6,46**

Контрольные вопросы к разделу 2

1. Перечислите особенности ТЗ, позволяющие выделить эти задачи в отдельный класс задач ЛП и использовать специальные методы для их решения.

2. Что такое опорный план перевозок и чем он отличается от других планов?

3. Какие существуют методы построения первоначального плана ТЗ и чем они отличаются друг от друга?

4. Что означает условие сбалансированности ТЗ? Почему необходимо его соблюдать?

5. Транспортная задача

	50	60+b	200
100+a	7	2	4
200	3	5	6

будет закрытой, если ….

6. Как сбалансировать ТЗ, если запасы поставщиков превосходят заказов потребителей? Как узнать, какое количество запасов останется не вывезенным у каждого поставщика?

7. Как сбалансировать ТЗ, если заказы потребителей превосходят запасов поставщиков? Как узнать, какое количество запасов недополучит каждый потребитель?

8. Как можно добиться, чтобы в оптимальном плане перевозка от конкретного поставщика S_i к конкретному потребителю D_j была запрещена?

9. Что такое цикл и что означает перераспределение перевозок по циклу?

10. Что общего и в чём различия транспортной задачи и задачи о назначениях (ЗОН)?

11. Как выглядит решение ЗОН? Какие значения могут принимать переменные решения? Нужно ли требовать, чтобы они были целыми или логическими (булевыми)?

12. Может ли на практике встретится несбалансированная ЗОН? Как в таких случаях сбалансировать задачу?

13. Какие методы знаете для решения задачи о назначениях?

14.Нужно ли требовать, чтобы переменные решения ЗОН были целыми или логическими? Объясните почему?

Задачи для самостоятельного решения к разделу 2

2.1) *Строительство автодорог*

С шести асфальтобетонных заводов должен вывозиться асфальт для строительства пяти участков автодорог области. Транспортные издержки при перевозках, заказы дорожно-строительных бригад и запасы на заводах различны и заданы в таблице. Менеджер подрядной организации хочет минимизировать транспортные расходы для данных условий.

а) Каковы наименьшие транспортные издержки?

б) Сколько машин и на какие участки будет недопоставлено?

в) Если в качестве дополнительного условия: план поставок асфальта для участка А необходимо выполнить полностью, каковы транспортные издержки нового плана? Сколько машин и на какие участки будет недопоставлено в этом случае?

г) Есть ли у задачи альтернативное решение?

Таблица. Начальные данные задачи

	Участок A	**Участок B**	**Участок C**	**Участок D**	**Участок E**	**Заказы**
АБЗ 1	1200	1250	850	900	1350	**65**
АБЗ 2	1250	950	1250	850	700	**46**
АБЗ 3	1400	1000	1200	1050	850	**52**
АБЗ 4	1350	850	800	750	1200	**29**
АБЗ 5	1300	650	1300	1050	1300	**28**
АБЗ 6	1500	850	1000	1250	700	**67**
Запасы	**79**	**28**	**61**	**77**	**72**	

2.2) *Простейшая транспортная задача*

Минимизируйте суммарные транспортные издержки для задачи, приведённой в таблице

Таблица. Начальные данные задачи №2

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	Запасы
S_1	14	6	5	12	17	14	14	11	-	12	17
S_2	13	10	3	15	14	9	8	16	4	17	23
S_3	15	13	11	-	9	2	6	7	14	17	10
S_4	12	17	4	12	14	6	11	7	9	18	24
S_5	18	12	11	4	8	17	-	11	8	9	5
Заказы	6	11	11	3	12	12	8	3	2	11	

Принять во внимание, что пункт назначения D_4 недоступен для источника S_3, D_9 недоступен для источника S_1 и D_7 недоступен для источника S_5.

Найти разницу между наилучшим и наихудшим планами перевозок.

2.3) *Простейшая задача о назначениях*

Мастер должен назначить на 10 типовых операций (D_1, D_2,…, D_{10}) 12 рабочих (S_1, S_2,…, S_{12}). Время, которое каждый рабочий тратит на выполнение каждой операции, приведено в табл.2.31. Определить оптимальную расстановку рабочих по операциям, при которой суммарное время на выполнение работ будет минимально, принимая во внимание, что рабочие S_3, S_4, S_5 не могут выполнять операцию D_3, а рабочий S_6 не может выполнять операцию D_7.

Таблица 2.31. Начальные данные задачи №2

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}
S_1	29	31	16	16	17	34	20	28	16	13
S_2	29	25	22	30	24	31	37	23	16	27
S_3	27	32	-	14	34	30	27	16	19	17
S_4	21	35	-	32	31	28	30	29	31	16
S_5	21	36	-	14	24	30	21	28	29	27
S_6	28	35	25	30	22	16	-	18	25	18
S_7	27	34	33	26	14	19	18	37	19	16
S_8	27	34	27	30	37	37	26	22	35	33
S_9	16	26	18	26	16	20	31	34	28	29
S_{10}	16	22	33	22	21	19	19	37	36	24
S_{11}	26	35	13	14	17	36	17	17	25	21
S_{12}	34	25	19	14	36	36	17	36	26	33

Указание. Введите фиктивную операцию, которая может поглотить всех “лишних рабочих”. Какое значение времени выполнения этой операции следует ввести для каждого рабочего. Есть ли однозначный ответ на этот вопрос? Какое значение наиболее удобно?

2.4) Авиаперевозка грузов

Грузовой самолёт имеет три грузовых отсека: передний, центральный и задний. Для этих отсеков заданы пределы загрузки по весу и объёму (табл. 2.32). Веса грузов, реально помещённых в эти отсеки, должны быть пропорциональны этим пределам, чтобы не нарушать баланса самолёта в полёте. Имеется 4 заявки на перевозку грузов. Веса, объёмы грузов и ожидаемая прибыль даны в табл. 2.32. Можно взять любую дробную часть груза. а) Определить, сколько каждого груза нужно взять и как распределить его по отсекам, чтобы максимизировать прибыль от перевозки в предстоящем рейсе. Б) Если владелец наименее выгодного груза согласен повысить цену, на сколько рублей надо поднять оплату, чтобы принять этот груз?

Таблица. Пределы загрузки отсеков самолёта

Отсек	Предел по весу, т	Предел по объёму, $м^3$
Передний	12	700
Центральный	18	900
Задний	10	500

Таблица 2.32. Начальные данные задачи

Груз	Вес, т	Удельный объём, $м^3/т$	Прибыль, $/т
1	20	5	320
2	16	70	400
3	25	60	360
4	13	40	290

Часть 3.
Сетевые модели, оптимизация на графах и сетях. Сетевое планирование и управление

Сетевое моделирование – это один из методов системного подхода к управлению сложными динамическими системами с целью обеспечения определения оптимальных показателей. Теоретической основой сетевых методов и моделей является *теория графов*. В число задач на графы входят задачи транспортного типа, сетевого планирования, задачи о назначениях, о замене оборудования и многие другие экономико-математические задачи. Велико значение теории графов в кибернетике, теории информации, теории игр и др.

3.1. Некоторые понятия о графах и сетях

<u>*Теория графов*</u> - раздел математики, в котором изучают графы, их качественные и количественные характеристики, операции над графами, а также методы решения задач прикладного характера.

Опр. *Граф* – это схема, состоящая из конечного множества точек (вершин) {X}, соединённых определённой системой линий (рёбер), множества {T}. Т.е. говорят, что задан *неориентированный граф G(X,T),* если задано конечное множество {X} вершин и множество {T} неупорядоченных пар $(x_i,x_j)\in T$, называемых *ребрами*. Вершины графа принято изображать точками или кругами, а ребра (x_i,x_j) - линиями, соединяющими вершины. Ребра вида (x_i,x_i) называются *петлями*, в дальнейшем будем рассматривать графы, не имеющие петель, и графы, две вершины которых соединены не более чем одним ребром. *Вершины x_i и x_j* графа G(X,T) называются *смежными*, или *инцидентными* ребру (x_i,x_j), если ему принадлежат. Два различных ребра называются *смежными*, если они имеют общую вершину. Если граф не содержит ребер, он называется *пустым,* если содержит все возможные ребра, называется *полным*. Полный неориентированный граф G с "n" вершинами содержит n(n-1)/2 ребер. Некоторая последовательность попарно смежных ребер графа называется *цепью* или *маршрутом* с разными ребрами. Замкнутая цепь называется *циклом.* На рис.3.1(а) множеством вершин графа являются множество $\{X\}=\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, множеством рёбер - множество: $T=\{(x_0,x_1);(x_1,x_2);(x_0,x_5);(x_2,x_3);(x_3,x_4);(x_5,x_3);(x_5,x_1)\}$, смежными рёбрами графа являются рёбра: (x_0, x_1);(x_1,x_2) или (x_5, x_3) и (x_3, x_4) и др., смежными вершинами являются вершины: x_0 и x_1, x_3 и x_2 и т.д., ребро (x_5, x_5) -петля. Цепью является последовательность рёбер: (x_0, x_1); (x_1,x_2); (x_2,x_3) или (x_0,x_5); (x_5,x_3); (x_3,x_4).

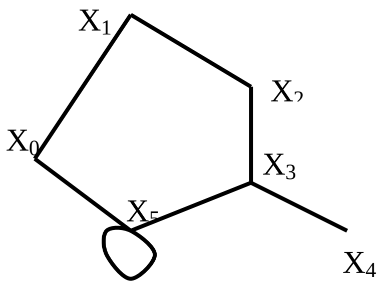


Рис.3.1(а).

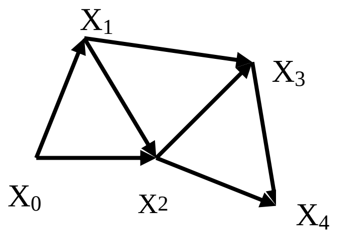


Рис.3.1(б).

Если ребра графа ориентированы, он называется ориентированным или *орграфом* (рис.3.1(б)). Ребра орграфа называются *дугами,* последовательность смежных дуг орграфа называется *путем.* Замкнутый путь называется *контуром*. Путь (цепь) называется *простым*, если проходит через дуги (рёбра) графа по одному разу, в противном случае – *сложным*. Примерами дуг на орграфе (рис.3.1(б)) являются: (x_0,x_1), (x_1,x_2), (x_1,x_3), (x_2,x_4) и др. Путь: $(x_0,x_1),(x_1,x_2),(x_0,x_2)$ является контуром. Орграф, в котором две смежные вершины связаны противоположно ориентированными дугами, называется *симметричным.* Если для любой пары вершин графа можно построить цепь, его называют *связным.* Орграф называется связным, если ему отвечает связный неориентированный граф.

Связный граф с числом вершин $n>1$, не имеющий циклов, называется *деревом* (рис.3.2). У дерева с “n” вершинами число ребер равно (n-1).

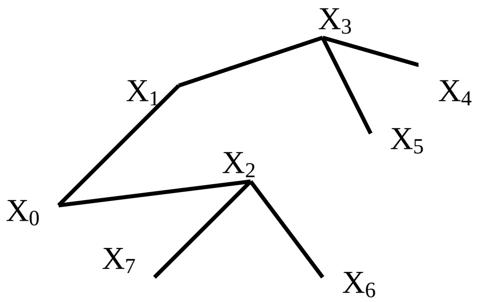


Рис.3.2.

Конечный связный ориентированный граф без петель G (X,T) называется *сетью,* если: а) граф имеет только две такие вершины, когда одна не имеет входящих дуг, это начало графа (x_0), а другая – выходящих, конец графа (x_n). Вершину x_0 ещё называют *источником*, x_n - *стоком*, остальные вершины промежуточными;

б) всем дугам графа G (X,T) поставлено в соответствие число $d_{ij}\geq 0$ (количественная характеристика). Это может быть длина дуги (расстояние между пунктами), пропускная способность дуги, оценки времени, стоимость перевозок и т.д. Графы можно задать с помощью матриц.

1. *Матрица смежности* A(a_{ij}): $A(a_{ij}) = \begin{cases} 1 \Rightarrow X_{ij}\,есть, \\ 0 \Rightarrow X_{ij}\,нет, \rightarrow i,\, j = 1,n. \end{cases}$

Свойства матрицы смежности: а) матрица А квадратная, размерности (n×n), где n число вершин графа; б) матрица А симметричная, т.е. $a_{ij}=a_{ji}$, i,j=1,n; в) единицы, стоящие по главной диагонали соответствуют петлям при данной вершине; с) изолированной вершине соответствует строка и столбец, состоящий из нулей; г) число единиц в матрице равно числу дуг графа. Для графа, изображённого на рис.1(а) матрица смежности имеет вид (рис.3(а)):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рис.3.3(а).

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Рис.3.3(б).

2. *Матрицей инциденции* B(b_{ij}). $B(b_{ij}) = \begin{cases} 1, \textit{если} \rightarrow x_i \textit{начало}(x_{ij}), \\ 0, \textit{если} \rightarrow x_i \notin (x_{ij}), \\ -1, \textit{если} \rightarrow x_j \textit{конец}(x_{ij}). \end{cases}$

Свойства матрицы инциденции: а) матрица B(b_{ij}) размерностью (nxm), где n - число вершин, m - число дуг графа; б) количество (+1) или (-1) в строках определяет степень соответствующей вершины; в) вершина, соответствующая строка которой, содержит только (+1), называется *входом* в граф, вершина, соответствующая строка которой, содержит только (-1), называется *выходом* из графа. Матрицей инциденции орграфа (рис.1(б)) является матрица B(b_{ij}) размерностью (5х7) (рис.3(б)). Можно составить матрицу инцидентности для неориентированного графа. В этом случае элементами матрицы будут только 1 и 0. Причём, 1 – если вершина является концом ребра, 0 – в противном случае.

Кроме перечисленных матриц, существуют матрицы *основных* и *простых* циклов. А так же матрица *достижимости* (в данном курсе не изучаются).

3.2. Использование теории графов для решения экономических задач

Графы и сети широко используются при постановке и решении задач техника - экономического характера. С помощью сетей решаются различные оптимизационные задачи, связанные с перемещением объектов, временным исполнением работ, принятием управленческих решений и т. д. Рассмотрим наиболее известные и часто используемые на практике алгоритмы.

1. “Дерево решений”. Своевременная разработка и принятие правильного решения – главные задачи работы управленческого персонала любой организации. На практике результат одного решения заставляет нас принимать следующее решение и т.д. Когда надо принять несколько решений в условиях неопределённости, когда каждое решение зависит от исхода предыдущего или исходов испытаний, то применяют схему, называемую *“деревом решений”*.

Опр. “Дерево решений” – это графическое изображение процесса принятия решений, в котором отражены альтернативные решения, состояние среды, соответствующие вероятности и выигрыши для любых комбинаций альтернатив. Рисуют дерево слева на право (или сверху вниз). Вершинам графа ставят в соответствие моменты, в которых принимают решения, обычно их обозначают квадратом, места появления исходов – кругами. Для каждой альтернативы считают ожидаемую стоимостную оценку (EMV) – максимальную из сумм оценок выигрышей, умноженных на вероятности реализации выигрышей, для всех возможных вариантов.

Мини-кейс «Производственная линия»

Задача №3.1. Главному инженеру компании надо решить, монтировать или нет новую производственную линию, использующую новейшую технологию. Если новая линия будет работать безотказно, компания получит прибыль 200млн. руб., если откажет, компания может потерять 150млн. руб. По оценкам главного инженера существует 60% шансов, что новая линия откажет. Можно создать экспериментальную установку, а затем уже решать, монтировать или нет линию. Эксперимент обойдётся в 10млн. руб. Существует 50% вероятность, что установка будет работать. Если она будет работать, то 90% шансов за то, что производственная линия также будет работать, если установка не будет работать, то только 20% шансов, что производственная линия заработает. Следует ли производственную линию? Какова ожидаемая стоимостная ценность наилучшего решения? Строим граф-дерево (рис.3.4).

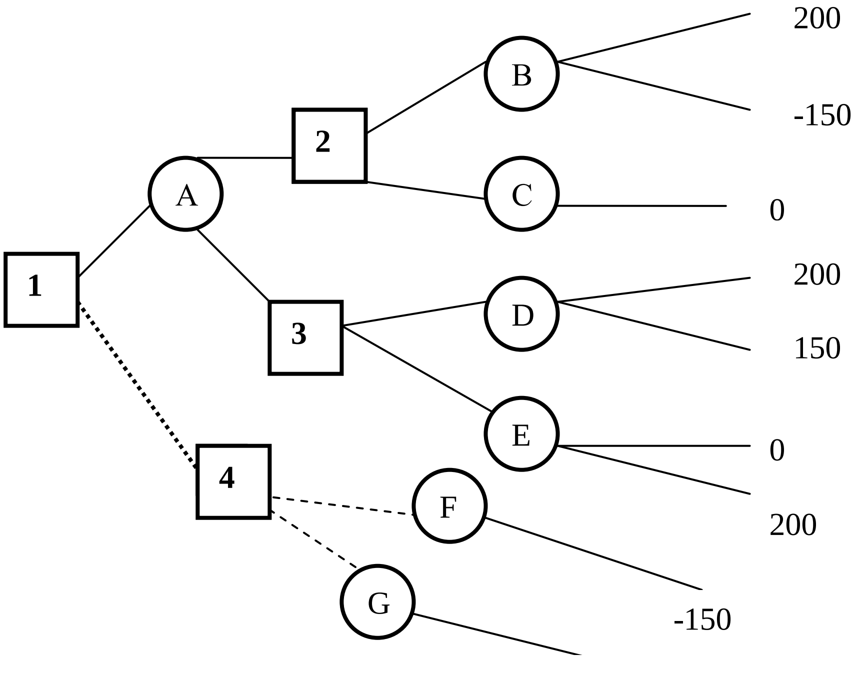


Рис.3.4.

Решение. В узле F линия работает с вероятностью 0,4, прибыль 200млн.руб. и не работает с вероятностью 0,6, убыток 150млн.руб.

EMV(F)=0,4·200+0,6·(-150)=-10, EMV(G)=0. Очевидно, в узле 4 выбираем EMV(4)=max{-10,0}=0, т.е. на этом этапе принимаем решение - линию не монтировать.

В узле B, EMV(B)=0,9·200+0,1·(-150)=165, EMV(C)=0. Таким образом, в узле 2 выбираем EMV(2)=max{165,0}=165, т.е. линию монтировать.

В узле D, EMV(D)=0,2·200+0,8·(-150)=-80, EMV(E)=0. В узле 3 выбираем EMV(3)=max{-80,0}=0, т.е. линию не монтировать.

В узле A, EMV(A)=0,5·165+0,5·0-10=72,5. Тогда в узле 1 выбираем EMV(1)=max{72,5;0}=72,5. *Вывод*: Ожидаемая стоимостная ценность наилучшего решения 72,5 млн. руб. Строим установку, если она работает, то монтируем линию, если не работает, то линию монтировать не надо.

Принять лучшее решение в задачах такого типа можно с помощью MS-Excel. С помощью надстройки “Дерево решений” можно нарисовать и проанализировать дерево решения. Подробно построение “дерева решений” рассмотрено на примере следующей задачи. Для задачи №3.1 “дерево решений” выглядит следующим образом (рис.3.5).

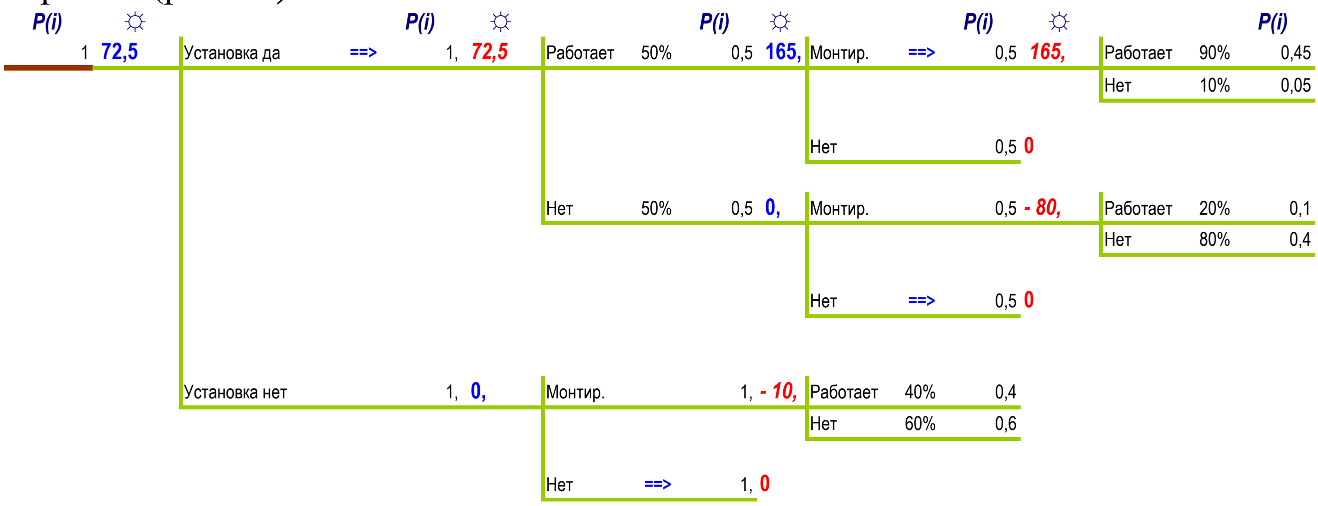


Рис.3.5.

3.3. Построение и анализ дерева решений с помощью MS-Excel

Мини-кейс “Компания Полёт”

Задача №3.2. “Компания Полёт” рассматривает проект по обслуживанию служебных перелётов на некоторой территории. На услуги компании имеется определённый спрос. Проект рискованный. Существует вероятность 40%, что в первый год спрос будет низким. Если он будет низкий в первый год, то с вероятностью 60% он останется низким и во все последующие годы. Если он будет высокий в первый год, то с вероятностью 80% он останется таким и во все последующие годы. Первое решение, которое должна принять компания, какой самолёт надо купить: новый турбовинтовой - $550тыс. или подержанный поршневой - $250тыс. Эксперты полагают, что в следующие годы такой самолёт будет стоить ещё меньше -$150тыс.

В связи с этим компания думает, не начать ли с одного поршневого самолёта, а если спрос будет большой, на следующий год купить ещё один такой самолёт.

Финансовые потоки, связанные с эксплуатацией самолётов при различных вариантах спроса, приведены в табл.3.1.

Таблица 3.1. Финансовые потоки при различных вариантах спроса

	I0		P1(i)	CF1	I1		P2(i)	CF2
		Высокий 1	60%	150		Высокий 2	80%	960
Турбо винтовой	-550					Низкий 2	20%	220
		Низкий 1	40%	30		Высокий 2	40%	930
						Низкий 2	60%	140
					Расширить	Высокий 2	80%	800
					-150	Низкий 2	20%	100

		Высокий 1	60%	100				
Поршневой	-250					Высокий 2	80%	410
						Низкий 2	20%	180
		Низкий 1	40%	50		Высокий 2	40%	380
						Низкий 2	60%	140

1) Какой самолёт купить? 2) Правильная ли идея, расширить деятельность компании за счёт покупки второго поршневого самолёта после первого года при высоком спросе? 3) Рассмотреть идею свёртывания бизнеса после первого года работы в случае низкого спроса. По имеющимся оценкам турбовинтовой самолёт через год может быть продан за $500 тыс. Провести анализ чувствительности выбора оптимальной альтернативы в обоих вариантах. Построить и проанализировать дерево с помощью надстройки “Дерево решений”. При расчётах необходимо учесть, что будущие финансовые потоки надо дисконтировать по ставке, например, 10% для получения чистой приведённой стоимости по формуле:

$$NPV = I_0 + \frac{(CF_1 + I_1)}{(1 + k\%)} + \frac{CF_2}{(1 + k\%)^2} \qquad (3.1)$$

Для построения “дерева решений” надо:

1. Открыть новую книгу MS Excel. Выбрать кнопку **“Организация диаграмм”** на стандартной панели инструментов и щёлкнуть по кнопке “**Создать новое дерево**” в появившемся окне надстройки **“Дерево решений**”. Появится лист MS Excel, надпись P(i) будет означать вероятность каждой ветви дерева, а n_i означает переменную состояния дерева, которая будет различна на каждой ветви (рис.3.6).

2. Если переменных n>1, надо щёлкнуть по вкладке “**Переменные и расчёты**” и увеличить число переменных на n-1 (рис.3.7).

3. Затем поставить курсор на звёздочку в ячейке, следующей после P(i) - это место, с которого дерево начнёт расти, (никогда не стирайте такие звёздочки, и всегда выделяйте ту, из которой надо продолжить дерево). Затем выбрать вкладку “**Редактировать дерево**” и щёлкнуть по кнопке ”**Добавить развилку «Выбор решения»**”, предварительно убедившись, что вы задали 2 ветви в этой развилке. Обратите внимание, чтобы на месте звёздочки появился синий ноль, под которым можно разглядеть формулу, например, =МАКС(R2:R3). Если ноль оказался красным и формула под ним другая, значит сделана ошибка, вы добавили развилку «**Варианты будущего**» вместо развилки «**Выбор решения**». В этом случае надо курсор поставить в начало развилки в красный ноль, щёлкнуть по клавише “**Удалить поддерево**” и заново ввести правильную развилку (рис.3.8).

4. Далее ввести нужные названия во введённой развилке решений и по каждому варианту ввести величины первоначальной инвестиции по данным задачи. После этого поставить курсор на верхнюю из двух звёздочек и вставить развилку «**Варианты будущего**» (рис.3.9).

5. На данном этапе изменить названия вариантов и вставить вероятности сценариев и прогнозируемые финансовые потоки. После этого, вернув курсор в точку развилки, щёлкнуть по кнопке **«Копировать поддерево»** или «**Копировать развилку**». Поставив курсор на звёздочку, где планируете продолжить дерево

решений, щёлкнуть по кнопке «**Вставить поддерево**». Развилка из предыдущей ячейки будет скопирована в данную ячейку. Останется только поменять начальные данные для этого этапа (числа финансовых потоков). В ячейку Z5 вставить развилку решений “Купить 2-ой самолёт” или нет (с отражением инвестиций первого года в покупку 2-го самолёта на соответствующей ветке), а в каждую из ветвей этой развилки скопировать развилку вариантов будущего ”Высокий или Низкий спрос во втором году” (рис.3.10).

6. Осталось на место всех звёздочек ввести формулу NPV (чистой приведённой стоимости будущих финансовых потоков с учётом дисконтирования). Перед этим удобно выровнять ветви, нажав на соответствующую кнопку в окне надстройки (рис.3.11).

7. После введения формул, надстройка сделает все необходимые вычисления и порекомендует, какие решения следует принимать в каждой развилке решений.

8. Чтобы увидеть результаты более компактно, можно сжать картинку дерева, спрятав колонки со значениями переменных состояния. Для этого нужно переключиться на вкладку «**Переменные расчёты**» и переставить переключатель в разделе «**Вид**» в положение «**Скрыть переменные**». Теперь, анализируя дерево, можно ответить на все вопросы задачи. Полезно также сделать анализ чувствительности, изменяя вероятности условий (рис.3.12).

Рассмотрим все эти этапы на задаче №3.2.

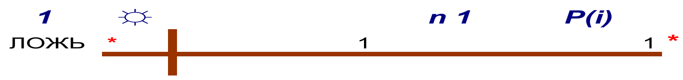


Рис.3.6.

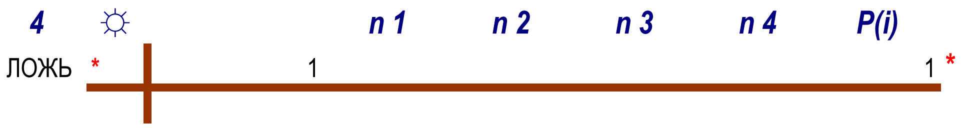


Рис.3.7.

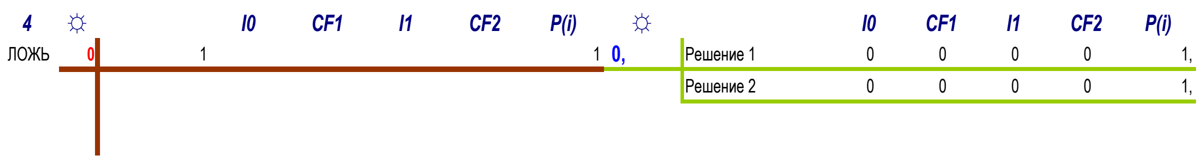


Рис.3.8.

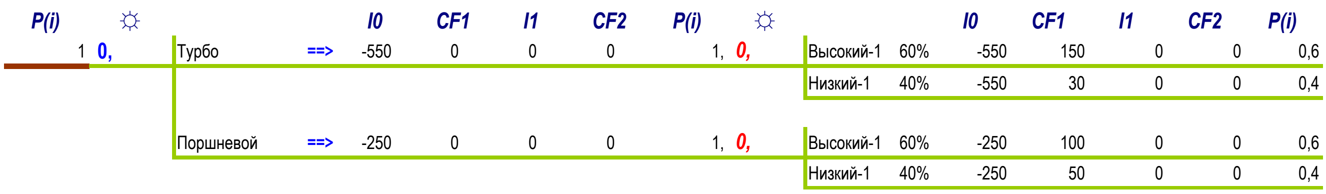


Рис.3.9.

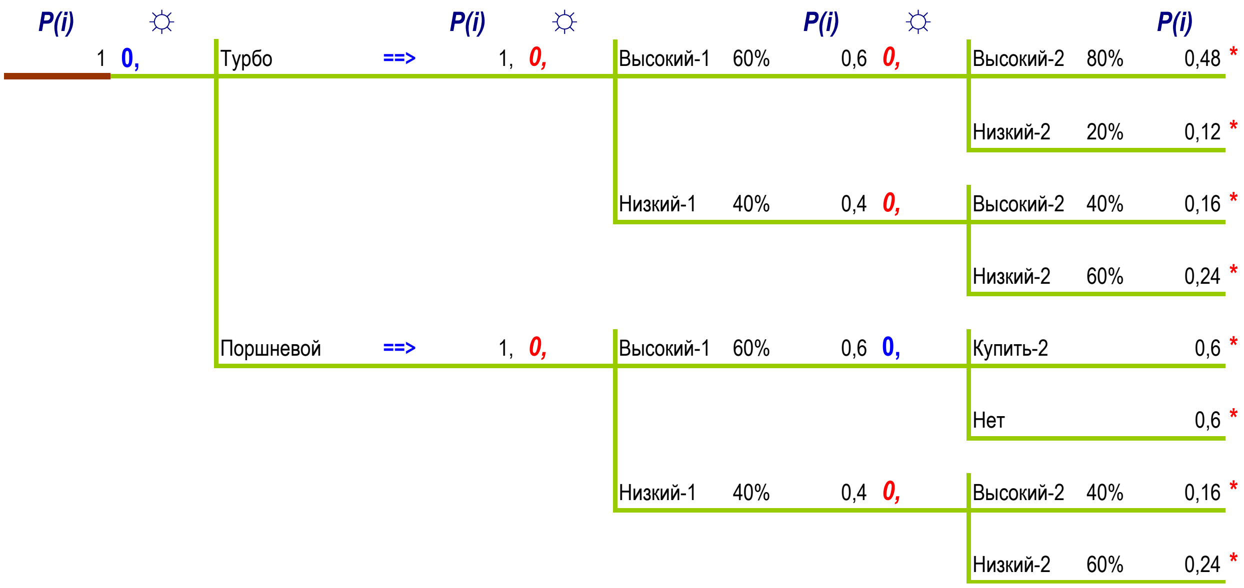


Рис.3.10.

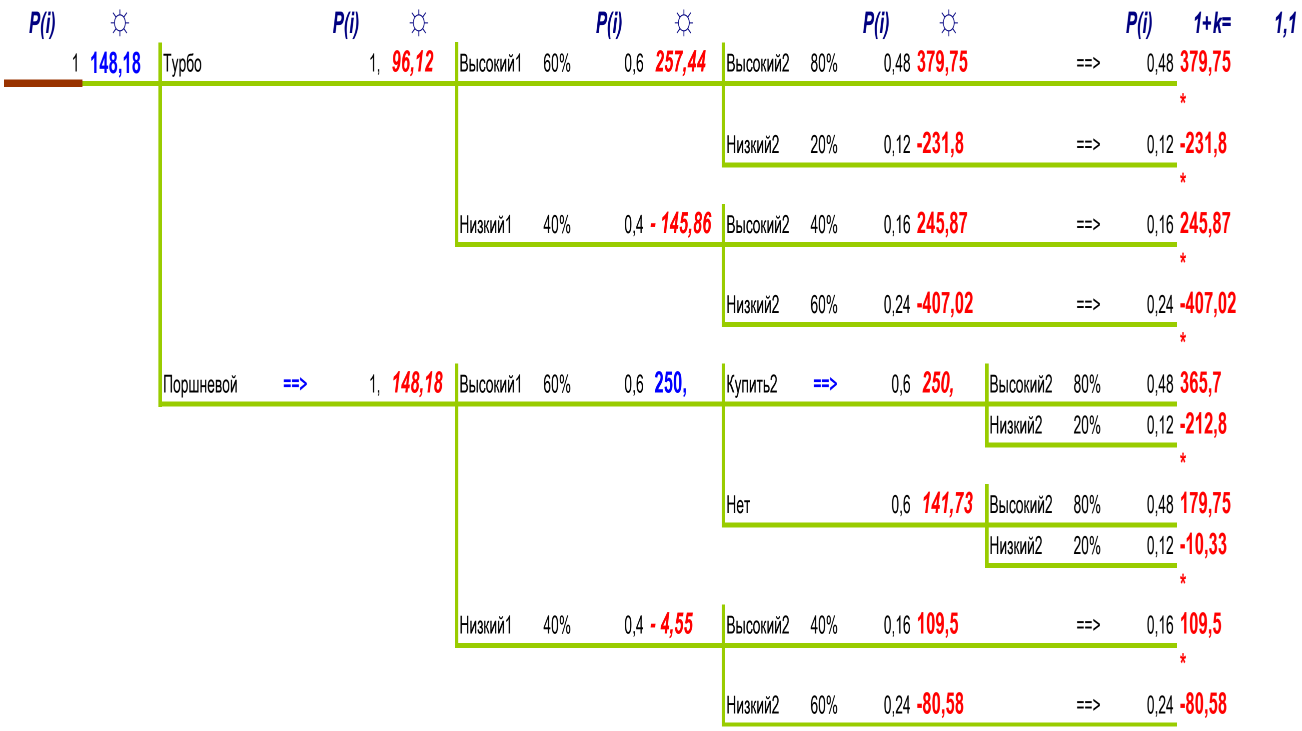


Рис.3.11.

Теперь, анализируя дерево, можно ответить на все вопросы задачи и провести анализ на возможность выхода из бизнеса после первого неудачного года: 1) Очевидно, компания должна купить поршневой самолёт. Цена вопроса $148,18 тыс. Поршневой самолёт выгоднее турбовинтового.

2) Идея купить второй поршневой самолёт после первого года при высоком спросе правильная.

3) Если после первого года работы спрос будет низким, потери компании составят 30·0,4+50·0,4-550-250=-768($тыс.). С учётом продажи турбовинтового самолёта потери составят (-268$тыс.).

Можно сделать анализ чувствительности, изменяя вероятности высокого спроса в первом и во втором году.

3.4. Сетевое планирование и управление

Решение хозяйственных задач связано с осуществления ряда работ (мероприятий, операций), одни из которых можно выполнить одновременно, параллельно, а другие – только в определённой последовательности. Так, чтобы начать производство нового изделия, необходимо: 1) разработать его конструкцию, технологию производства; 2) проектировать, заказывать, получать и монтировать оборудование; 3) планировать размещение оборудования, рассчитывать требуемые площади, строить требуемые помещения; 4) заключать договора с другими предприятиями о поставках необходимых материалов, сырья и комплектующих деталей; 5) набирать и готовить работников и т.д. Поэтому в современных условиях необходимо разработать и использовать сравнительно простые и эффективные методы руководства и быстрого принятия наиболее правильных решений. Поиски эффективных способов планирования сложных процессов привели к созданию новых методов *сетевого планирования и управления* (СПУ). *Сетевое планирование* – это метод планирования работ, операции в которых, как правило, не повторяются. Эффект от СПУ обусловлен в первую очередь внесением строгих логических элементов в формирование плана, которые позволяют привлечь современный математический аппарат и средства вычислительной техники. СПУ применяется во всех видах строительства, в индивидуальном и мелкосерийном производстве, в научно – исследовательских, проектных организациях, в производстве кинофильмов и т.д.

Назначение, характеристика и структура системы СПУ. Системы предназначены для управления деятельностью, направленной на достижение определённой цели. *Объектом* управления является *коллектив,* располагающий определёнными ресурсами и выполняющий комплекс работ.

Основные признаки, характеризующие СПУ: а) уровень руководства; б) количество сетей, описывающих проект; в) объём сетевой модели; г) число конечных целей проекта; д) ограничения по ресурсам; е) планируемые и контролируемые параметры проекта и т.д. Под проектом понимают совокупность операций (заданий, работ), которые надо выполнить для достижения поставленной цели в ограниченное время, при ограниченных материальных, людских и финансовых ресурсах.

В настоящее время широко распространены две методики количественного анализа проекта – CPM (английская версия Critical Path Method, т.е. *метод критического пути)* и PERT (Program Eval Uation и Review Technique, т.е. *метод анализа и обзора проекта*). Метод CPM предполагает анализ проекта в условиях, полной определённости, (длительность всех операций, необходимых для выполнения проекта, определено вероятностными методами). Метод CPM/Cost – исследует проект на оптимальность (“Длительность проекта - издержки”), а также влияние ограничений в использовании ресурсов. Эти методы можно реализовать в MS-Excel и MS-Project (русская версия).

Для отображения процесса выполнения проекта используется *сетевая модель*.

Сетевая модель и её основные элементы. Сетевые модели являются комплексом графических и расчётных методов, обеспечивающих моделирование сложных проектов, работ и алгоритмов. Основой сетевой модели является *сетевой график*. Сетевой график представляет собой графическое изображение последовательности выполнения комплекса работ, его часто называют сетевой граф, с этой точки зрения *сетевой график* – это *ориентированный граф* без контуров, дугам которого поставлены в соответствие одна или несколько числовых характеристик. В сетевом графике различают два основных элемента: *работу* и *событие*. *Работа* – это любое действие, процесс во времени, приводящий к достижению определённых результатов. На сетевом графике работы обозначаются стрелками. Работу ещё называют *операцией. Событие* – результат произведённой работы. Событие конкретизирует процесс планирования, на сетевом графике обозначается кругом или квадратом (вершины графа). Ни одна, выходящая из данного события работа, не может начаться до окончания всех работ, входящих в это событие. Событие, не имеющее предшествующих событий, называется *исходным (начальным*). Событие, не имеющее последующих событий и отражающее конечную цель проекта, называется *завершающим (конечным*). *Любая последовательность работ сети*, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы, называется *путём*. *Полный путь* - непрерывная последовательность работ сети от исходного до завершающего события. *Полный путь наибольшей продолжительности называется критическим, а время его выполнения* $T_{кр}$. Критический путь имеет особое значение в системе СПУ, так как работы этого пути определяют общий цикл завершения всего комплекса работ, планируемых при помощи сетевого графика.

Правила построения сетевого графика: 1. Исходное событие только одно.

2. Завершающее событие только одно.

3. Любые два события связаны не более чем одной работой.

4. В сетевом графике не должно быть замкнутых контуров.

5. Если для выполнения одной из работ необходимо получить результаты всех работ, входящих в предшествующее для неё событие, а для другой работы достаточно получить результат нескольких из этих работ, то нужно ввести дополнительное событие, отражающее результаты только этих последних работ, и фиктивную работу, связывающую новое событие с прежним. Фиктивные работы изображаются пунктирными стрелками.

С самого начала планирования и анализа проекта необходимо чётко представлять себе взаимосвязи между отдельными работами и установить соотношение “предшественник - последователь” для всех стадий проекта.

Пусть задан граф (рис.3.12). Показать последовательность выполнения работ этого сетевого графа. Здесь для начала работы D достаточно окончания работы A. Для начала же работы C нужно окончание работ A и B.

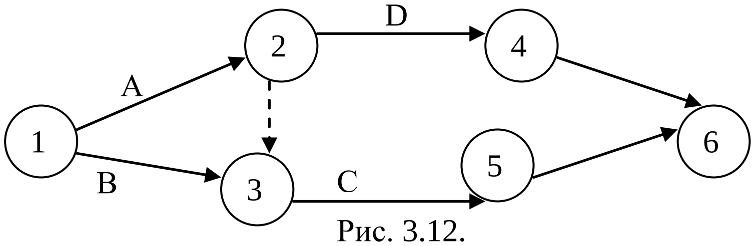


Рис. 3.12.

Упорядочение сетевого графика. Упорядочение сетевого графика заключается в таком расположении событий и работ, при котором для любой работы предшествующее ей событие расположено левее и имеет меньший номер по сравнению с завершающим эту работу событием.

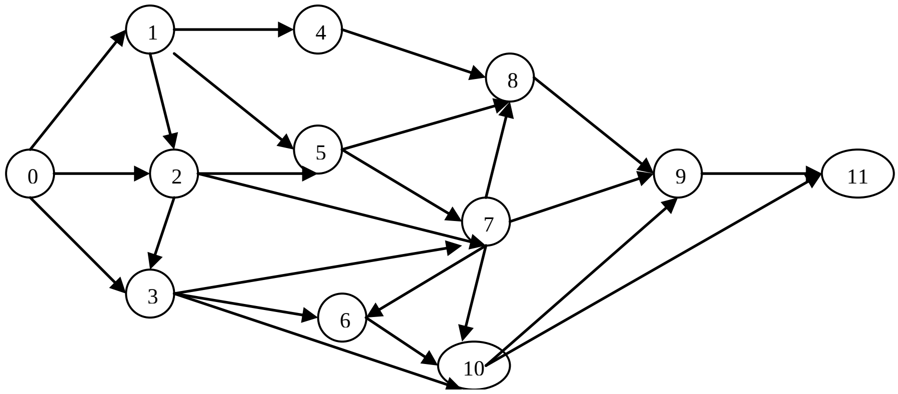


Рис.3.13.

Рассмотрим граф (рис.3.13). Разобьём условно сетевой график на несколько вертикальных слоёв. Поместив в первом слое начальное событие (0), (рис.3.14) мысленно вычеркнем из графика это событие и все выходящие из него работы-стрелки. Тогда без входящих стрелок останется событие (1), образующее второй слой.

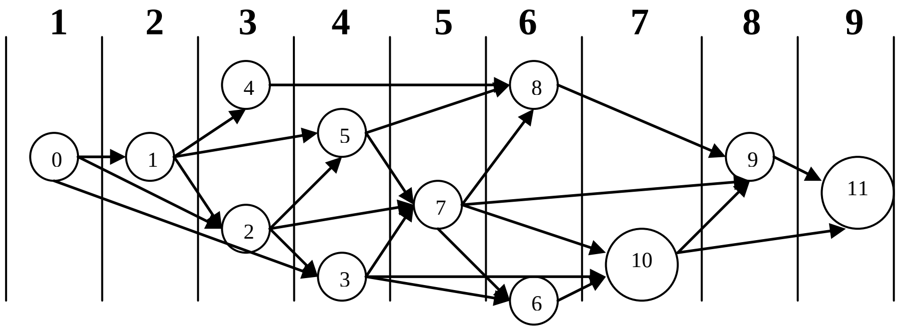


Рис.3.14.

Вычеркнув событие (1) и все выходящие из него работы, увидим, что без входящих стрелок остаются события (4) и (2), которые образуют третий слой. Продолжаем процедуру вычёркивания: четвёртый слой с событиями (5) и (3); пятый слой – с событием (7); шестой – с событием (8) и (6); седьмой – с событием (10); восьмой слой – с событием (9); и девятый слой – с событием (11).

Теперь видим, что первоначальная нумерация событий не совсем правильная: так событие (6) лежит в шестом слое, событие (7) (больший номер) лежит в пятом слое. То же самое можно сказать о событиях (9) и (10). Надо изменить нумерацию событий в соответствии с их расположением на графике.

3.5. Метод критического пути

Этот метод используется для управления проектами с фиксированным временем выполнения работ. Он позволяет ответить на следующие вопросы:

1. Сколько времени потребуется на выполнение всего проекта?

2. В какое время должны начинаться и заканчиваться отдельные работы?

3.Какие работы являются критическими и должны быть выполнены в точно определённый срок, чтобы не сорвать время выполнения проекта?

4. На какое время можно отложить выполнение некритических работ, чтобы они не повлияли на сроки выполнения проекта?

Основные временные параметры сетевого графика. Резервы времени.

Пусть t_{ij} – продолжительность работы с начальным событием i и конечным j (рис.3.16).

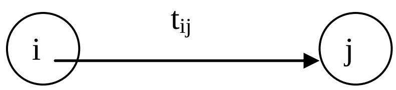


Рис.3.15.

Основными временными параметрами сетевого графа являются *ранние* и *поздние* сроки свершения события.

Ранний срок $t_р(j)$ свершения события j – это самый ранний момент (возможный наименьший срок окончания работы (i,j)), к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию (рис.3.16(а)).

$$t_p(j)=\max_i\{t_p(i)+t_{ij}\}; t_p(0)=0. \qquad (3.2)$$

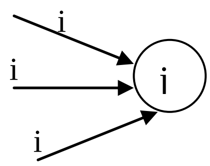


Рис.3.16(а).

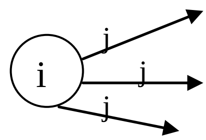


Рис.3.16(б)

Поздний срок $t_п(i)$ свершения события i – это такой предельный момент (максимально допустимый), после которого остаётся ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием (рис.3.16(б)).

$$t_n(i)=\min_j\{t_n(j)-t_{ij}\}; t_n(n)=t_p(n)=T_{кр}. \qquad (3.3)$$

Резервы времени пути, события, работы

Резерв времени пути μ равен разности между временем критического пути (наибольшего) и времени данного пути

$$R(\mu)=T_{кр}-T(\mu). \qquad (3.4)$$

Резерв времени R(i) события i показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение этого события без нарушения срока наступления завершающего события:

$$R(i)=t_п(i)-t_р(i). \qquad (3.5)$$

События, у которых $t_п(i)=t_р(i)$ называются *критическими событиями*. Критические события резерва времени не имеют. Если в сетевом графике один критический путь, его можно определить по критическим событиям. Если путей несколько, их ищут по критическим работам, а для этого определяют:

ранний срок начала работы (i,j): $t_{рн}(i,j)=t_р(i)$;

ранний срок окончания работы $t_{ро}(i,j)=t_р(i)+t_{ij}$;

поздний срок начала работы $t_{пн}(i,j)=t_п(j)-t_{ij}$;

поздний срок окончания работы $t_{по}(i,j)=t_п(j)$.

Различают четыре резерва времени работы: полный, свободный, независимый и гарантийный резервы.

1. Полным резервом времени $R_п(i,j)$ работы (i,j) называется максимальный запас времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить её продолжительность, не изменяя продолжительности критического пути.

$$R_п(i,j)=t_п(j)-t_р(i)-t_{ij}=t_{по}(i,j)-t_{ро}(i,j). \tag{3.6}$$

2. Свободный резерв времени $R_C(i,j)$ работы (i,j) называется максимальный запас времени, на которое можно отсрочить или увеличить продолжительность этой работы, но чтобы не нарушался ранний срок выполнения всех последующих работ.

$$R_с(i,j)=t_р(j)-t_р(i)-t_{ij}=t_р(j)-t_{ро}(i,j). \tag{3.7}$$

3. Независимый резерв времени $R_н(i,j)$ работы (i,j) – это запас времени, который имеет исполнитель, когда предшествующие работы заканчиваются в неудобное для него сроки, а он заканчивает свою работу в ранний срок, не расходуя резервов следующих за ней работ.

$$R_н(i,j)=t_р(j)-t_п(i)-t_{ij}. \tag{3.8}$$

4. Гарантийный резерв времени $R_г(i,j)$ работы (i,j) – это резерв времени, который имеет исполнитель, когда предшествующие работы заканчиваются в неудобное для него поздние сроки, но и он сдаёт свою работу в поздний срок.

$$R_г(i,j)=t_п(j)-t_п(i)-t_{ij}. \tag{3.9}$$

Если свободный и независимый резервы времени отрицательные, их заменяют нулями. Критические работы, как и критические события, резервов времени не имеют.

<u>Задача №3.3</u>. Построить сетевой график работ (табл.3.2). Найти критический путь, его время. Ответить на вопросы: 1. Можно ли отложить выполнение работы “Д” без отсрочки выполнения проекта. 2. На сколько недель можно отложить выполнение работы “С” без отсрочки выполнения проекта?

Таблица 3.2. Начальные данные задачи №19

Работа	Предшествующая работа	Время (нед.)
A	-	5
B	-	3
C	A	7
D	A	6
E	B	7
F	D,E	3
G	D,E	10
H	C,F	8

Решение. Рисуем сетевой график, помня основные правила (рис.3.18). Для того, чтобы было одно начальное и одно завершающее событие вводим фиктивные работы K=(6,8) и L=(7,8), которые делать не нужно. Время выполнения этих работ равно 0.

Для определения критического пути находим ранние и поздние сроки свершения событий: $t_р(1)=0$; $t_р(2)=5$; $t_р(3)=3$; $t_р(4)=\max(5+6,3+7)=11$;

$t_р(5)=\max(5+7,11+3)=14$; $t_р(6)=11+10=21$; $t_р(7)=14+8=22$;

$t_р(8)=\max(21,22)=22$. $T_{кр}=22$.

$T_{кр}=t_п(8)=22$; $t_п(7)=22-0=22$; $t_п(6)=22-0=22$; $t_п(5)=22-8=14$;

$t_п(4)=\min(22-10,14-3)=11$; $t_п(3)=11-7=4$; $t_п(2)=\min(11-6,14-7)=5$;

$t_п(1)=\min(5-5,4-3)=0$.

Критические события те, у которых $t_р(j)=t_п(j)$. Это события: 1, 2, 4, 5, 7, 8, т.е. критический путь проходит через эти вершины, на рис.11 он показан жирным шрифтом. *Вывод*: для завершения проекта необходимо 22 недели.

1. Работа “Д=(2,4)” лежит на критическом пути, т.е. её отложить нельзя без увеличения времени критического пути.

2. Работа C=(2,5) не лежит на критическом пути, её можно задержать на

$R_{пол}(2,5)=t_п(5)-t_р(2)-t_{25}=14-5-7=2$(недели).

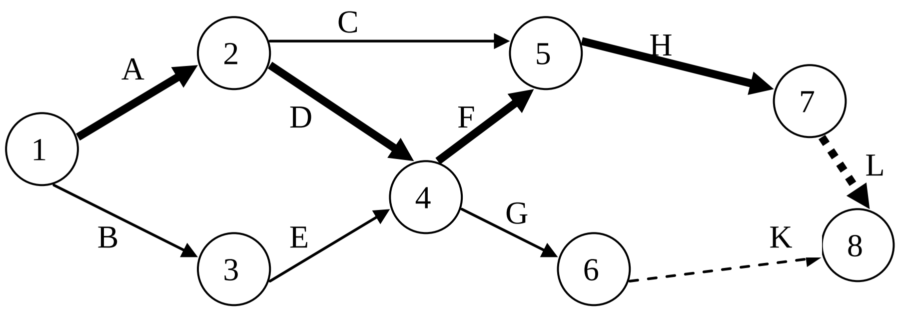


Рис.3.17.

видны критические и некритические работы сетевого графа. Чтобы их
Построим график Ганта для графа (рис.3.17) задачи №3.3.

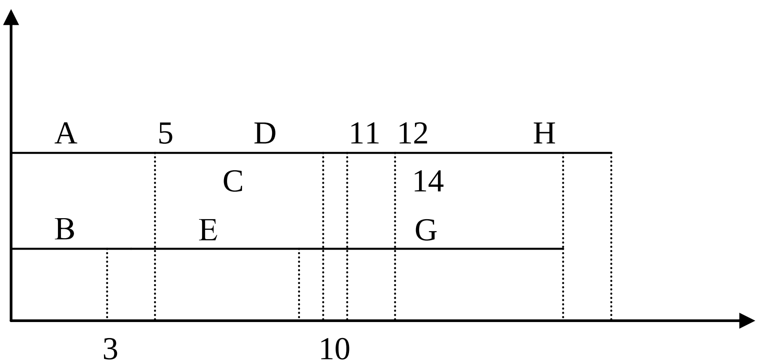


Рис.3.18.

Сетевой график недостаточно нагляден для определения тех работ, которые должны выполняться в данный момент времени. В связи с этим рекомендуется строить линейную диаграмму Ганта. Диаграмма для графа (рис.3.17) показана на рис.3.19.

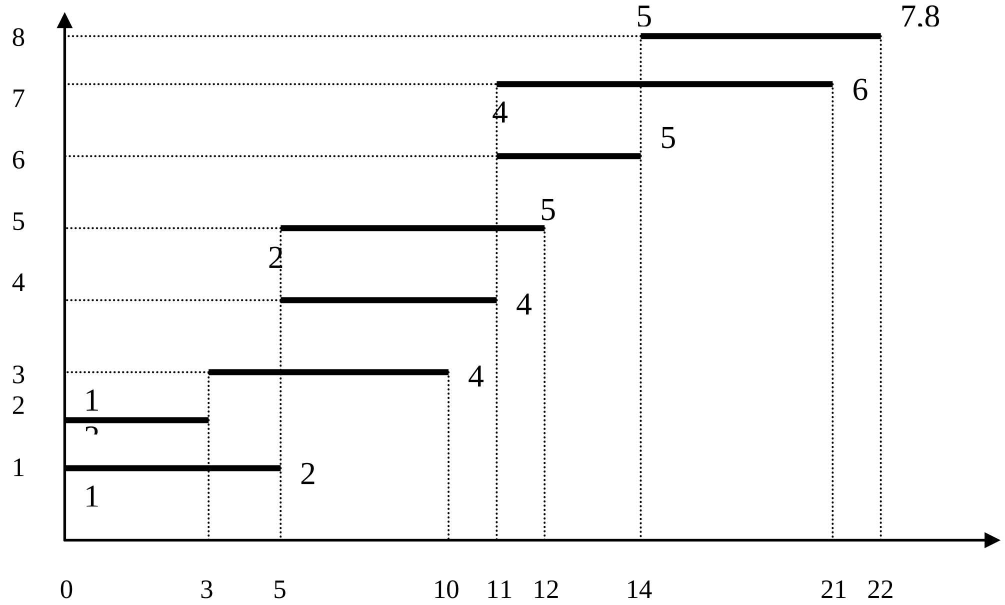


Рис.3.19.

3.6. Анализ сетевой модели

1. Первым шагом анализа сетевого графика является проверка правильности его построения, а именно: детализация работ и структуры сети. При этом наряду с установление лишних работ должен быть рассмотрен вопрос о возможности параллельного выполнения работ, исходя из особенностей планируемого процесса и имеющегося количества работников.

2. Вторым этапом анализа может быть классификация и группирование работ по величинам резервов (полных и свободных). Определить степень трудности выполнения в срок каждой группы работ некритического пути можно с помощью *коэффициента напряжённости*. Опр. Коэффициент напряжённости работ – это отношение времени отрезка наибольшего из некритических путей, проходящих через данную работу ($t(L_{max})$), ко времени несовпадающего отрезка критического пути, проходящего через эту работу.

$$K_{н_{ij}} = \frac{t(T_{\max}) - t'_{kp}}{T_{kp} - t'_{kp}} = 1 - \frac{R_n(i,j)}{T_{kp} - t'_{kp}}, \tag{3.10}$$

где $t(T_{max})$ – продолжительность максимального пути через (i,j); $t'_{кр}$ – длина отрезка рассматриваемого пути, совпадающего с критическим путём, $T_{кр}$- время критического пути, проходящего через эту работу. $0 \le K_н \le 1$. Очевидно, что для всех критических работ $K_н(i,j)=1$. Чем коэффициент ближе к 1, тем сложнее выполнить данную работу в установленный срок, чем $K_н$ меньше, тем большим относительным резервом обладает данный путь в сети. По вычисленным $K_н$ все работы распределяются по зонам: критические, подкритические и резервные.

Критическая зона сетевого графика – это совокупность путей, включая критические, у которых $K_н \approx 1$. *Резервная зона* – это совокупность работ, имеющих $K_н$ значительно меньше единицы.

Найдём $К_н$ для работы C=(2,5) задачи №3.3. Ранние и поздние сроки для всех событий уже найдены. Отметим, на каких событиях x_i и x_j достигается максимум $t_п$ и минимум $t_р$. Отметки слева показывают, из какого события надо двигаться в данное, чтобы получился наиболее ранний срок $t_р$, а справа - в какое событие надо двигаться из данного, чтобы получился наиболее поздний срок $t_п$. По этим отметкам можно найти максимальный путь через данную работу.

Для работы (2,5): в событие 2 (начало работы) надо двигаться из события 1, т.е. отрезок максимального пути от 1 до начала работы будет (1,2). Из события 5 (конец работы) надо двигаться в событие 7, т.е. отрезок максимального пути от 5 до 7 будет (5,7), т.е. $\mu_{max}(2,5)=(1,2,5,7)=20$. $Т_{кр}=22$. Сравнивая $Т_{кр}$ и μ_{max} находим нужный для расчёта К(2,5) отрезок $\mu_{кр}$, не совпадающий с $\mu_{max}(2,5)$. $\mu_{кр}=(2,4,5)=6+3=9$. $R_{пол}(2,5)=t_п(5)-t_р(2)-t_{25}=14-5-7=2$. К(2,5)=1-2/(22-13)=0,78.

При анализе графика, прежде всего, обращают внимание на критические работы, от которых зависит своевременное и качественное выполнение всего проекта. Следует также, обращать внимание на наличие резервов времени по отдельным работам, но эти резервы нельзя рассматривать как оценку времени простоя исполнителя. На выполнение работ сетевого графика выделяются ресурсы (в человеко-часах, машино-часах и т.д.), равные суммарной трудоёмкости все предусмотренных работ. Оценка резервов времени позволяет более рационально распределить трудовые и материальные ресурсы по работам графика. Большинство работ обладает закономерностью: увеличивая число исполнителей, удаётся уменьшить длительность выполнения работы. Чаще всего встречается гиперболическая зависимость длительности работы t от количества работников x: $t = a + \frac{b}{x}$. Перебрасывая людей и технику с ненапряжённых работ на напряжённые работы критического пути, можно сократить сроки всего проекта. Обычно на практике устанавливается директивный срок ($Т_{дир}$) выполнения проекта и расчётный ($Т_k$). Если предположить, что срок окончания работ является случайной нормально распределённой величиной, то можно найти

$$P\left(T \geq T_{дир}\right) = \Phi(u), u = \frac{T_{дир} - T_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{t_{kpi}}^2}}, \tag{3.11}$$

$\sigma_{t_{kpi}}^2$ - дисперсия i – той работы критического пути, n – число работ критического пути. Для этой вероятности устанавливаются определённые пределы – границы допустимого риска. По данным практики при $P\left[T \geq T_{дир}\right] > 0{,}65$ можно утверждать, что на этапах критического пути имеются избыточные ресурсы. Т.е. общая продолжительность работ критического пути может быть сокращена. При $P\left[T \geq T_{дир}\right] < 0{,}35$ велика опасность того, что заданный срок выполнения работ критического пути будет сорван и поэтому необходимо перераспределение ресурсов.

Одним из важных преимуществ сетевых графиков является возможность их оптимизации по различным признакам: по времени, по материальным и людским ресурсам, по стоимости и технико-экономическим показателям.

В настоящее время распространены две методики количественного анализа проектов – **CPM** (метод критического пути) и **PERT** (метод анализа и обзора проекта).

Метод CPM предполагает анализ проекта в условиях, когда длительности различных стадий проекта чётко определены. Существует метод CPM/COST, который исследует проект по принципу оптимизации *“длительность - издержки*”, а также влияние ограничений в использовании ресурсов на расписание проекта. Для решения всех этих задач можно использовать русскую версию MS Project 2003.

3.7. Оптимизация сетевого проекта

В процессе реализации сетевого проекта могут быть различные отклонения от намеченных сроков выполнения работ. Определение резервов времени событий и работ сетевого графа имеет важное значение на всех этапах реализации проекта (разработка, корректировка, реализация), в том числе и для его оптимизации.

Оптимизация сетевого проекта это *процесс улучшения* организации выполнения комплекса работ, с учётом сроков его выполнения. Проводится с целью сокращения длительности критического пути, выравнивания коэффициентов напряжённости работ, рационального использования ресурсов. Задержка с выполнением некритических работ не отразится на сроках выполнения проекта, а увеличение времени выполнения критических работ ведёт к срыву графика (отсрочки выполнения всего проекта). Может оказаться, что для выполнения всех работ с.г. установлен директивный срок $T_{дир}$ и он меньше $T_{кр}$. Ясно, что уложиться в $T_{дир}$ можно только путём сокращения длительности работ критического пути. Это возможно за счёт привлечения на эти работы дополнительных ресурсов (людей, механизмов и т.д.) или путём расчленения какой – либо работы на части и параллельное их выполнение. Высвободить ресурсы можно, взяв их с некритических работ, за счёт удлинения сроков их выполнения в пределах резервов, а это требует новых затрат. Для анализа таких ситуаций в сетевом планировании разработан метод *“время - стоимость, или длительность – издержки”*, смысл которого в том, что процесс сокращения продолжительности работ достигается за счёт минимально необходимого приращения затрат, т.е. проводится оптимизация с.г. по затратам.

Оптимизационные задачи могут быть *“по критерию стоимости*”: при заданной общей длительности проекта $T_{дир}$ найти вариант с наименьшими затратами. И по *“критерию времени”*: при заданной стоимости S проекта найти минимальное время его выполнения. Оптимизация С.Г. может быть условно разделена на *частную и комплексную*: *частная* – только по критерию времени или только по критерию стоимости; *комплексная* – нахождение оптимального соотношения величин стоимости и сроков выполнения проекта в зависимости от целей, стоящих при его реализации.

Стоимость проекта. Стоимость проекта определяет стоимость выполнения каждой работы плюс дополнительные расходы. Сокращение времени выполнения критических работ с помощью дополнительных ресурсов, увеличивает стоимость этих работ. Но общее время выполнения проекта уменьшается, что может привести к снижению общей стоимости проекта. В практике сетевого планирования предполагают, что отдельные стадии проекта можно выполнить либо в нормальные сроки $t_{ij}^{н}$, либо в минимальные (срочные) $t_{ij}^{ср}$, но не в промежутке между ними. Затраты в первом случае - $C_{ij}^{н}$, во втором - $C_{ij}^{ср}$, очевидно, $t_{ij}^{н} > t_{ij}^{ср}, C_{ij}^{н} < C_{ij}^{ср}$. Зная эти величины, можно вычислить *затраты на ускорение* каждой работы

$$\Delta_{ij} = \frac{c_{ij}^{ср} - c_{ij}^{н}}{t_{ij}^{н} - t_{ij}^{ср}}. \qquad (3.12)$$

Для определения длительности выполнения всего комплекса операций и возможная стоимость, строятся графики при нормальном и при срочном режимах работ. Определяют критические пути, их длины $T_{кр}^{н}, T_{кр}^{ср}$ и стоимости $S_{кр}^{н}, S_{кр}^{ср}$, затем проводится анализ сетевых графиков. В результате получают набор вариантов оптимальных сетевых графиков по двум критериям – времени исполнения и стоимости.

1. *Снижать стоимость* можно за счет увеличения сроков выполнения тех работ, которые приводят к наибольшему сокращению затрат (принцип “наибольшей эффективности”), т.е. Δ_{ij} больше. Удешевление не может отдельно затрагивать только критические работы, его проводят также за счёт увеличения частного резерва времени некритических работ (т.е. увеличение времени работы, у которой Δ_{ij} положительная величина).

2. *Снижать время* выполнения с.г. можно за счёт уменьшения сроков выполнения тех критических работ, затраты на ускорение которых минимальны.

Задача №3.4. В табл. 3.4 приведены характеристики работ сетевого графика при нормальном и срочном режимах их выполнения. Предполагается, что в пределах между нормальным и срочным режимами возможен любой срок выполнения работ. Определить: **1.** Критический путь для каждого режима.

2. Резервы времени работ, затраты на ускорение критических работ. 3. Ответить на вопросы: а) на сколько дней можно максимально сократить выполнение работ, исходя из выделенных на это средств –6 млн. руб? б). Определить минимальное увеличение затрат на комплекс работ при сокращении общего срока выполнения на 5 суток.

Таблица 3.3. Параметры работ сетевого графика примера №3.4

Работа	Предшест. работа	Нормальный режим		Срочный режим	
		t_{ij}(сут.)	S_{ij}(млн.р)	t_{ij}(сут.)	S_{ij}(млн.р)
A	-	6	10	5	15
B	-	5	8	4	10
C	-	4	7	3	15
D	A	5	11	4	16
E	A	16	14	13	20
F	B,E,G	6	12	4	14
G	C	15	19	13	16
K	D,F	6	13	4	21
L	B,E,G	19	29	16	38
			$S_{нор}$=123		$S_{ср}$=165

Решение. Сетевой график имеет вид (рис.3.20).

1. а) Для определения критического пути, находим ранние и поздние сроки свершения события для нормального режима.

$t_р(1)=0$, $t_р(2)=4$, $t_р(3)=6$, $t_р(4)=max(4+15,6+16)=22$, $t_р(5)=max(6+11,22+6)=28$, $t_р(6)=max(22+19,28+6)=41$. $T_{kp}=41$.

$t_п(6)=41$, $t_п(5)=41-6=35$, $t_п(4)=min(41-19,35-6)=22$, $t_п(3)=min(22-16,35-5)=6$, $t_п(2)=22-15=7$, $t_п(1)=min(7-4,6-6,22-5)=0$.

Критические события: 1, 3, 4, 6. Критические работы: A, E, L (рис.3.21).

Б) Вычисляем ранние и поздние сроки событий при срочном режиме: $t_р(1)=0$, $t_р(2)=3$, $t_р(3)=5$, $t_р(4)=max(3+13,5+13)=18$, $t_р(5)=max(5+4,18+4)=22$, $t_р(6)=34$. $T_{kp}=34$. $t_п(6)=34$, $t_п(5)=30$, $t_п(4)=min(34-16,30-4)=18$, $t_п(3)=min(30-4,18-13)=5$, $t_п(2)=18-5=13$, $t_п(1)=min(13-3,5-5)=0$. Критический путь тот же.1-3-4-6.

2. Для расчёта резервов времени работ, составляем табл.3.4.

3. Для ответа на вопросы задачи об оптимизации, составляем табл.6, перечень возможных сетевых графиков.

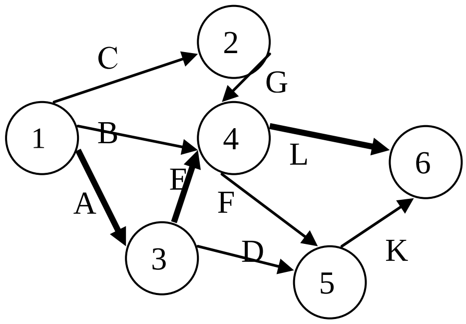


Рис.3.20.

Таблица 3.4. Временные параметры сетевого графика

x_i	x_j	$t_i^р$	$t_j^р$	$t_i^п$	$t_j^п$	t_{ij}	$R_{пол}$	$R_{св}$	Δ_{ij}
1	2	0	4	0	7	4	3	0	
1	3	0	6	0	6	6	0	0	5
1	4	0	22	0	22	5	17	17	
2	4	4	22	7	22	15	3	3	
3	4	6	22	6	22	16	0	0	2
3	5	6	28	6	35	5	24	17	
4	5	22	28	22	35	6	7	0	
4	6	22	41	22	41	19	0	0	3
5	6	28	41	35	41	6	7	7	

Таблица 3.5. Перечень возможных сетевых графиков

№	(1,2)	**(1,3)**	(1,4)	(2,4)	**(3,4)**	(3,5)	(4,5)	**(4,6)**	(5,6)	$T_{дир}$	**S**
1	4	**6**	5	15	**16**	5	6	**19**	6	**41**	**123**
2	4	**6**	5	15	**15**	5	6	**19**	6	**40**	**125**
3	4	**6**	5	15	**14**	5	6	**19**	6	**39**	**127**
4	4	**6**	5	15	**13**	5	6	**19**	6	**38**	**129**
5	4	**6**	5	15	**13**	5	6	**18**	6	**37**	**132**
6	4	**6**	5	15	**13**	5	6	**17**	6	**36**	**135**
7	4	**6**	5	15	**13**	5	6	**16**	6	**35**	**138**
8	4	**5**	5	15	**13**	5	6	**16**	6	**34**	**143**

В табл.3.5 представлены восемь вариантов возможных сетевых графиков.

а). Если в задаче требуется снизить время с.г., это можно сделать за счёт уменьшение длительности выполнения тех работ критического пути, которые приводят к наименьшему увеличению затрат. Так, например, в задаче дополнительно выделено 6 млн. руб., т.е. S_1=123+6=129 (млн. руб.), то нас устроит вариант №4. *Вывод*: минимальное количество дней, на которое можно сократить с.г. равно 41-38=**3** (суток).

б) Если в задаче требуется снизить стоимость с.г., это можно сделать за счёт увеличения длительности выполнения тех работ, которые приводят к наибольшему сокращению в затратах (по наибольшему приросту затрат). В этом случае надо анализировать вариант сетевого графика со срочным временем выполнения работ и в первую очередь увеличивать продолжительность тех работ, которые не принадлежат критическому пути. В этом случае надо заранее вычислить коэффициенты напряжённости. Каждая работа (i,j) характеризуется продолжительностью t(i,j), которая может находиться в пределах

$$a(i,j) \le t(i,j) \le b(i,j), \qquad (3.13)$$

a(i,j) – минимально возможная продолжительность работы, b(i,j) – нормальная продолжительность выполнения работы. Продолжительность каждой работы, имеющей резерв времени, увеличивают до тех пор, пока не будет исчерпан этот резерв или пока не будет достигнуто верхнее значение продолжительности b(i,j). При этом стоимость выполнения проекта, равная до оптимизации $S = \sum_{i,j} S(i,j)$ уменьшиться на величину

$$S = \sum_{i,j} \Delta S(i,j) = \sum \left[b(i,j) - t(i,j)\right] \cdot \Delta_{ij} \ . \qquad (3.14)$$

Продолжительность каждой работы t(i,j) целесообразно увеличить на величину такого резерва, чтобы не изменить ранние (ожидаемые) сроки наступления всех событий сети, т.е. на величину свободного резерва времени R_c.

2. В нашей задаче требуется сократить общий срок выполнения с.г. на 5 суток с минимальными затратами. Это график №6, при этом дополнительно потребуется 135-123=**12** млн. руб. Таблица 3.5 позволяет для руководителей проекта выбрать из 8 вариантов лучший, который устраивает их и по деньгам и по времени.

3.8. Анализ проекта с помощью MS-Project 2003

1. Вызвать MS-Project и создать пустой проект. В столбец ”Название задачи” ввести обозначения этапов проекта, а в столбец ”длительность” – их продолжительность (эти данные можно вставить целой группой, если они есть в MS-Excel). В таблице слева можно добавлять или убирать столбцы. Ещё в один столбец надо ввести информацию о предшественниках. Если другие столбцы не нужны, можно их убрать, чтобы освободить место.

2. При вводе исходных данных MS-Project начинает строить *диаграмму Ганта* (график Ганта), который даёт графическое представление сетевого графа.

График Ганта. а) Длина каждого столбика, соответствующего определённой стадии проекта, пропорциональна длительности стадии (работы). До тех пор, пока не указаны предшествующие этапы, на диаграмме Ганта (с правой стороны), все этапы начинаются одновременно.

б) Чтобы ввести информацию об этапах, предшествующих данному, надо сделать двойной щелчок на названии этапа. Появится диалоговое окно, в котором можно вводить любую информацию об этапе. Нам нужна вкладка **«Предшественники»,** в столбце **«Название задачи»** можно выбрать все этапы, предшествующие данному. Они вводятся по одному на строку. В столбце **«Тип»** можно указать, начинается этап сразу после окончания предыдущего (**ОН**) – окончание-начало или с некоторым запаздыванием (**ОД**) – столбец запаздывает. По умолчанию последний этап начнётся так рано, как только это возможно после окончания предшествующего этапа. После того, как указаны все предшественники этапа, нажимаем «ОК» и вызываем такое же окно для другого этапа.

с) После введения всех предшествующих работ получи новую диаграмму Ганта, в которой работы начинаются после окончания предыдущих, причём, начало каждой работы совпадает с ранним сроком свершения её начального события. Уменьшить диаграмму можно инструментом «**Уменьшить**» (значок в виде лупы со знаком (-)). В задачах, связанных с оптимизацией проектов, удобно добавить к проекту суммарную задачу «**Сервис/Параметры/Вид»,** (внизу диалогового окна). При этом на диаграмме Ганта будет добавлена задача (проект) с указанием полной длительности проекта. При сокращении проекта изменение его длительности будет немедленно изображено на графике.

3. После построения диаграммы, длительность проекта можно посмотреть, используя меню «**Проект/Сведения**» и далее кнопка «**Статистика**». На диаграмме Ганта легко видны критические и некритические работы сетевого графа. Чтобы их увидеть, надо отформировать диаграмму. Для этого: вызвать в меню «**Формат**» команду «**Мастер диаграмм Ганта**». В появившемся окне нажать кнопку «**Далее**». В следующее окне нажать кнопку-переключатель «**Критический путь**» и снова «**Далее**». В появившемся окне отметить возможность «**Настроить сведения о задаче**» и опять «**Далее**». В новом окне полезно попросить, чтобы рядом с отрезком. Изображающим этап, отображалось его «**Название**». Далее выбираем кнопку «**Готово**», в появившемся окне написать «**Форматировать**». После этого появится заключительное окно «**Выход из мастера**». На полученной диаграмме Ганта критические работы окрашены красным цветом. Построим график Ганта и критический путь на примере задачи №19.

Мини-кейс «Проект компании “Сеть магазинов”»

Задача №3.5. Компания планирует развёртывание сети магазинов в одном из регионов России. Отдел развития компании составил план работы по развёртывания сети, состоящий из 21 этапа. Информация о нормальной длительности этапов в рабочих днях приведена в табл. 3.6. Сетевая диаграмма проекта, показывающая порядок выполнения этапов приведена на рис.3.21. После того, как план был доложен, выяснилось, что он не годится. Товар под новую сеть уже заказан, и поставки начнутся за 4 недели до планируемого завершения проекта. При этом излишки товара вынужден будет оставить у себя центральный склад, что полностью парализует его работу. Для нормализации ситуации необходимо сократить длительность проекта на 2 недели. В расчётах выявлено, что некоторые этапы можно сократить на 3 дня. В табл. 3.7 указаны стоимости ускорения выполнения этапов проекта. Если она не указана, сокращение не возможно.

В задаче требуется: 1. Построить критический путь и определить его время.

2. Определить минимальную стоимость сокращения длительности проекта на 2 недели. 3. Допустим, что альтернативе сокращения проекта на 2 недели, является наём дополнительных складских площадей, но это обойдётся в 15у.е. в день. Какой срок сокращения длительности проекта оптимален по издержкам в этом случае?

Таблица 3.6. Длительность этапов

Этап	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Длит. (дни)	12	10	9	10	11	14	8	8	15	10	13	6	11	11	7	10	16	11	8	11	6

Таблица 3.7. Стоимость сокращения длительности этапов на 1-ый, 2-ой и 3 день

Этап	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1-ый	4	5	4	4	8	5	7	4	5	4	7	8	7	6	7	7	7	8	4	6	7
2-ой	-	7	9	6	10	-	7	6	-	9	9	9	12	7	10	9	11	8	-	-	9
3-ий	-	8	9	6	12	-	10	9	-	14	14	11	17	11	10	13	14	12	-	-	-

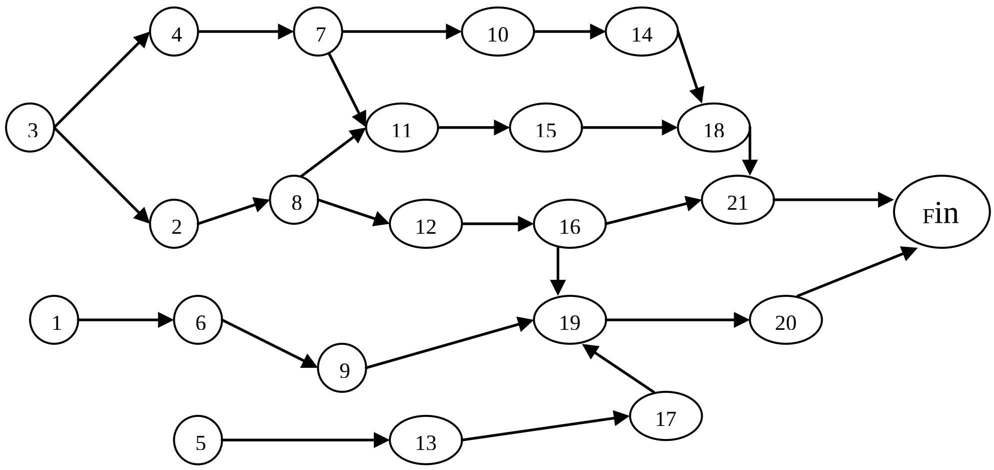


Рис. 3.21.

Решение. Для решения задачи используем программу MS Project 2003. В табл. 3.6 и 3.7 для каждой стадии (работы) проекта указаны длительность её проведения и стоимость её сокращения на один день. Первый вопрос, который возникает в задаче: *сколько времени требуется для выполнения всего проекта*? Т.е. надо построить критический путь и рассчитать $T_{кр}$. Для этого надо упорядочить график, установить соотношения «предшественник - последователь» для всех стадий проекта (у нас сетевой график уже есть). Далее используем MS Project, для построения диаграммы Ганта и детального анализа проекта.

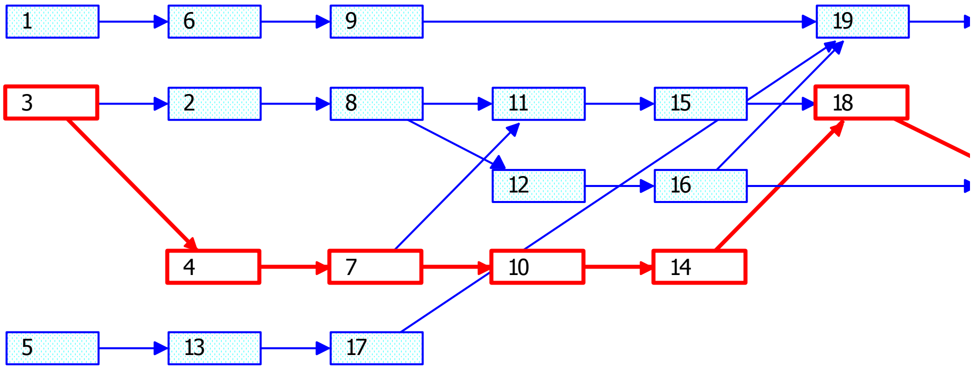


Рис.3.22

Ид	Длительность	Предшественники
1	12 дней	
2	10 дней	3
3	9 дней	
4	10 дней	3
5	11 дней	
6	14 дней	1
7	8 дней	4
8	8 дней	2
9	15 дней	6
10	10 дней	7
11	13 дней	7;8
12	6 дней	8
13	11 дней	5
14	11 дней	10
15	7 дней	11
16	10 дней	12
17	16 дней	13
18	11 дней	14;15
19	8 дней	9;16;17
20	11 дней	19
21	6 дней	16;18
22	0 дней	20;21

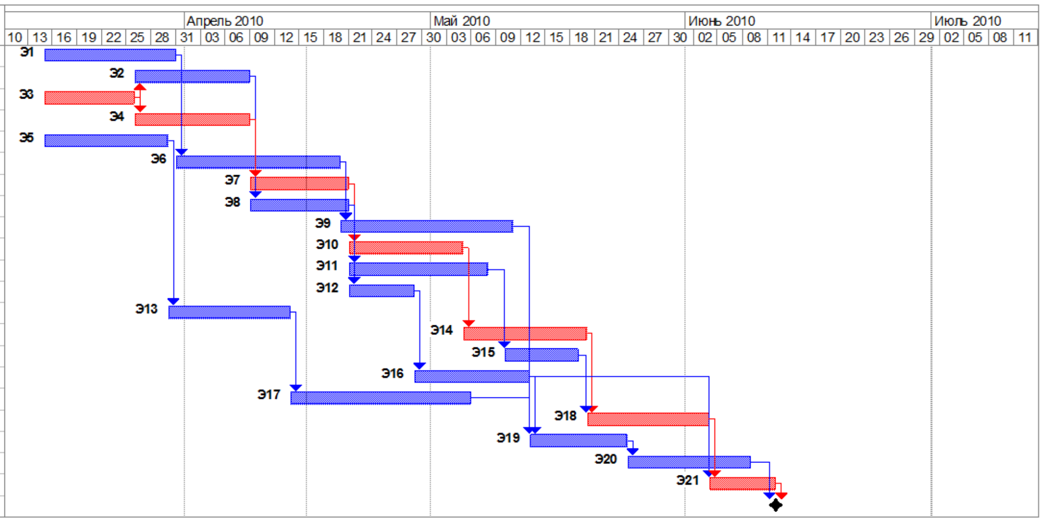


Рис.3.23

Ид	Название задачи	Общий временной резерв
1	Проект	5 дней
2	Э1	1 день
3	Э2	0 дней
4	Э3	0 дней
5	Э4	8 дней
6	Э5	5 дней
7	Э6	0 дней
8	Э7	1 день
9	Э8	5 дней
10	Э9	0 дней
11	Э10	1 день
12	Э11	3 дней
13	Э12	8 дней
14	Э13	0 дней
15	Э14	1 день
16	Э15	3 дней
17	Э16	8 дней
18	Э17	0 дней
19	Э18	3 дней
20	Э19	3 дней
21	Э20	0 дней
22	Э21	0 дней

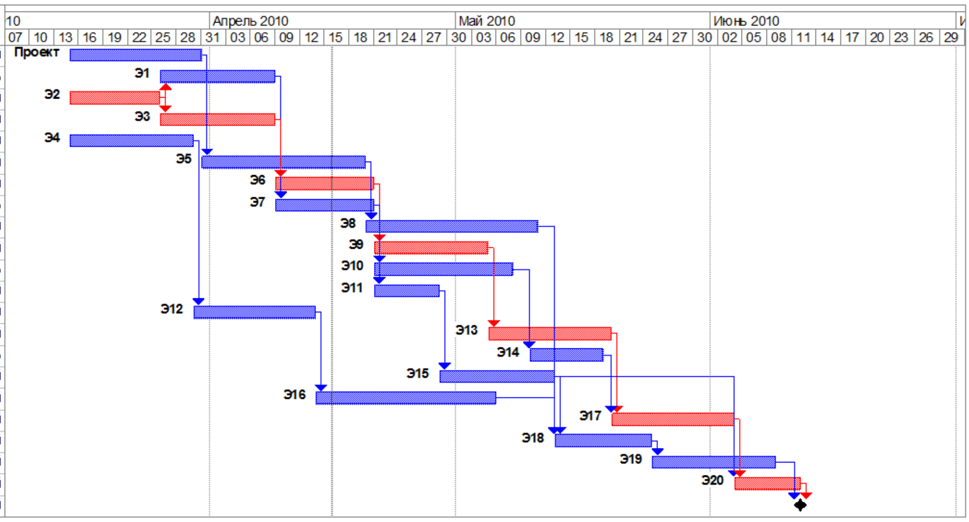


Рис.3.24

Ответ на вопрос ***1***. Длительность проекта 65 дней или 13 недель.

По условию задачи длительность проекта надо сократить на 2 недели (10 дней). Очевидно, это можно сделать за счёт критических работ, а это работы 3, 4, 7, 10, 14, 18 и 21. Любое сокращение проекта приводит к его удорожанию. Чтобы получить минимальную стоимость сокращения, надо сокращать, в первую очередь, те работы, которые имеют наименьшую стоимость сокращения. Т.е. основная тактика сокращения длительности проекта состоит в том, чтобы проводить сокращение на единицу длительности за каждый шаг и выбирать ту критическую работу, сокращение которой стоит дешевле всего. Сокращать сразу на две и более единицы времени лучше не делать, т.к. на каком-то шаге работа может стать не критической, дальнейшее её сокращение только увеличит бесполезные затраты средств. Иногда сокращение проекта приводит к появлению нескольких критических путей, естественно имеющих одинаковое время. В этом случае приходится сокращать каждый из этих путей на одну единицу, чтобы сократить весь проект, например на один день. Обычно сетевой график задан в двух режимах, «Нормальном» и «Срочном», расчёт стоимости ускорения производят по формуле (3.12).

а) Т.к. затраты на ускорение работы связаны с использованием различных ресурсов, начинать надо с введения данных об этапах проекта. В диалоговом окне «**Сведения о задаче**» (вызывается двойным щелчком мыши по имени стадии), на вкладке «**Ресурсы**» можно задать ресурсы для каждой стадии проекта.

б) После ввода всех ресурсов надо открыть меню «**Окно→ Разделитель**». Появится дополнительное окно «**Ресурсы и предшественники**», по щелчку правой кнопкой мыши появится меню, в котором можно выбрать окно «**Трудозатраты ресурсов**», в котором нужно задать стоимости ресурсов. Двойным щелчком левой кнопки мыши щёлкнуть по названию ресурса, в диалоговом окне «**Сведения о ресурсе**», на вкладке «**Затраты**», задать величины нормальной («**Стандартная ставка**») и срочной стоимости работы («**Ставка сверхурочных**»). Нажимаем «**ОК**» и переходим к другому ресурсу. После введения стоимости ресурсов, можно посмотреть статистку проекта, чтобы убедиться, что есть сведения о стоимости работ. В нашей задаче не надо рассчитывать стоимость ускорения каждого этапа проекта, она задана в табл.3.7.

с) Самая дешёвая для сокращения работа у нас – (Э3), удорожание проекта - на 4 ед. Для её сокращения щёлкнем название стадии в верхней таблице и после этого в нижней таблице в столбце «**Сверхурочный труд**» поставим 1 рабочий день. После ввода и перехода в верхнюю таблицу длительность работы изменится с 9 до 8 дней. Соответственно изменится диаграмма Ганта. Статистика проекта покажет: длительность проекта сократилась до 324 дней, а его стоимость возросла на 4 ед. Далее самая дешёвая работа – (Э4), с удорожанием проекта на 4 ед. После каждого сокращения работы, надо обращать внимание, чтобы она оставалась критической, тогда, если возможно, сократить её ещё раз. При этом в столбце «**Сверхурочный труд**» надо поставить 2 дня. И т. д.

г) Как только предел сокращения достигнут, для ответа на второй вопрос, можно снова проследить график сокращений и посмотреть статистику.

В нашей задаче стоимость ускорения работ задана табл. 3.7. Самый дешевый для сокращения этап Э3, поэтому сокращаем этот этап на 1 день.

Итак, последовательность сокращения следующая:

1) Э3- 1день (4у.е.), $T_{кр}$=64дня, S=124+4=128(у.е.), критический путь 1;

2) Э4- 1день (4ед.) $T_{кр}$=63дня, S=128+4=132(у.е.), критический путь 1;

3) Э21- 1день (7ед.) $T_{кр}$=62дня, S=132+7=139(у.е.), критический путь 1;

4) Э18- 1день (8ед.) $T_{кр}$=61день, S=139+8=147(у.е.), критических пути три;
5) Э21- 1день (9ед.) $T_{кр}$=60дней, S=147+9=156(у.е.), критических пути три;
6) Э3- 1день (9ед.) $T_{кр}$=59дней, S=156+9=165(у.е.), критических пути три;
7) Э3- 1день (9ед) и Э20 - 1день (6ед). $T_{кр}$=58дней, S=165+9+6=180(у.е.), критических пути три;
8) Э1- 1день (4ед.), Э18 -1день (8ед). $T_{кр}$=57дней, S=180+4+8=192(у.е.), критических пути три;
9) Э6- 1день (5ед.), Э12- 1день (8ед), Э18- 1день (12ед). $T_{кр}$=56дней, S=192+5+8+12=217(у.е.), критических пути три;
10) Э4 - 1день (6ед), Э8 – 1день (4ед), Э9 – 1день (5ед). $T_{кр}$=55дней, S=217+6+4+5=232(у.е.), все работы критические.

Итого: стоимость сокращения проекта равна 108 единицам (232-108). Время выполнения проекта 55 дней.

3.9. Управление проектами с неопределённым временем выполнения работ

В методе критического пути предполагалось, что время выполнения работ нам известно. На практике же эти сроки обычно не определены. Можно строить некоторые предположения о времени выполнения каждой работы, но нельзя предусмотреть все возможные трудности или задержки выполнения. Для управления проектами с неопределённым временем выполнения работ наиболее широкое применение получил *метод оценки и пересмотра проектов*, рассчитанный на использование вероятностных оценок времени выполнения работ, предусматриваемых проектом. Для каждой работы вводят три оценки:

Оптимистическое время “a” – наименьшее возможное время выполнения работы;

Пессимистическое время “b” – наибольшее возможное время выполнения работы;

Наиболее вероятное время “m” – ожидаемое время выполнения работы в нормальных условиях.

По a, b и m определяют ожидаемое время выполнения работы:

$$t = \frac{a + 4m + b}{6} \tag{3.15}$$

и дисперсию ожидаемой продолжительности t:

$$\sigma^2 = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2. \tag{3.16}$$

Используя значение t, определяют критический путь сетевого графика. Случайная величина T – время завершения проекта имеет нормальное распределение со средним значением E(t), равным сумме ожидаемых значений времени работ на критическом пути и средне квадратичным отклонением σ(T), равным корню квадратному из суммы дисперсий работ критического пути. Предполагается, что времена выполнения каждой из работ можно считать независимыми друг от друга. Тогда можно рассчитать вероятность завершения проекта в установленный срок $T_{дир}$.

$$P\left(t_{kp} < T_{дир}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{T_{дир} - E(T)}{\sigma(T)}\right),$$ где Φ(x) – функция Лапласа.

Мини-кейс «Проект строительства бассейна»

Задача №3.6. Проект строительства плавательного бассейна состоит из девяти основных работ. В табл.3.6 даны три временные оценки работ. 1. Каков ожидаемый срок завершения проекта? 2. Чему равно стандартное отклонение времени завершения проекта? 3. Какова вероятность того, что выполнение проекта займёт не более 25 рабочих дней?

Таблица 3.6. Начальные данные задачи №3.6

Работа	Предшеств. работа	Оптимистическое (а)	Наиболее Вероятное (m)	Пессиместическое (в)
A	-	3	5	6
B	-	2	4	6
C	A,B	5	6	7
D	A,B	7	9	10
E	B	2	3	6
F	C	1	2	3
G	D	5	8	10
H	D,F	6	8	10
I	E,G,H	3	4	5

Решение. Составляем табл.3.7, в которой рассчитано ожидаемое время и дисперсии для каждой работы.

Таблица 3.7. Ожидаемое время и дисперсии работ

Работа	t=(a+4m+b)/6	σ^2=(b-a)/6
A	4,8	9/36
B	4	16/36
C	6	4/36
D	8,8	9/36
E	4	16/36
F	2	4/36
G	7,8	25/36
H	8	16/36
I	4	4/36

Строим сетевой график с указанием ожидаемой продолжительности каждой работы. Находим критический путь и его время (рис.3.22).

1.Критический путь: A – D – H – I. Длина критического пути: E(T)=25,6. 2. Дисперсия ожидаемого времени выполняемого проекта равна сумме дисперсий критического пути: σ^2(T)=(9/36)+(9/36)+(16/36)+(4/36)=38/36.

Тогда стандартное отклонение σ(T)=1,03 (дней). 3. Найдём вероятность того, что выполнение проекта займёт не более $T_{дир}$=25 дней.

$$P\left(t_{kp} < T_{дир}\right) = P\left(t_{kp} < 25\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{25 - 25{,}6}{1{,}03}\right) \approx 0{,}2 + \Phi(-0{,}58) \approx 0{,}5 - 0{,}219 = 0{,}281.$$

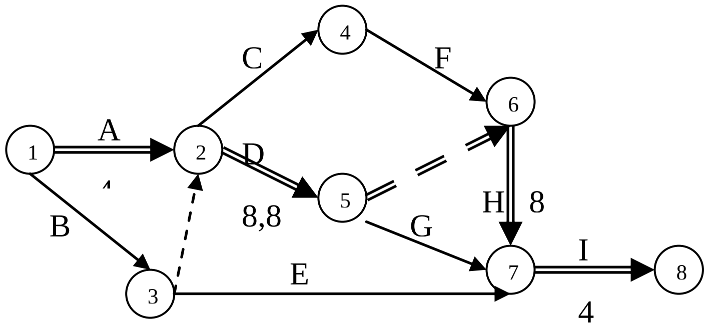


Рис.3.22.

Вывод: Найденная вероятность очень мала, скорее всего, выполнение проекта займёт большее время.

Контрольные вопросы к разделу 3

1. Что называется графом? Чем отличается ориентированный граф от обычного графа? С помощью каких матриц можно задать графы?

2. Что такое граф – дерево? Опишите схему “дерево решений”. Как получить дерево минимальной длины?

3. Что называется графом – сетью?

4. Что такое сетевое планирование и управление (СПУ)? Назначение, характеристика и структура СПУ.

5. Что такое проект? С помощью каких методик возможен количественный анализ проекта?

6. С помощью какой модели можно описать проект? Перечислите основные элементы сетевой модели.

7. Перечислите основные временные параметры сетевой модели. По каким формулам можно рассчитать временные резервы каждой стадии проекта?

8. Объясните, почему длительность проекта не равна сумме длительностей всех его стадий?

9. Что называется диаграммой Ганта? Для каких целей она применяется?

10. Какие стадии проекта называются критическими? Что такое “критический путь”? Какие методы определения критического пути вы знаете?

11. Всегда ли увеличение длительности критической стадии приводит к удлинению проекта, а сокращение – к сокращению проекта?

12. Как определить стоимость проекта? Всегда ли сокращение стадии означает увеличение её стоимости? Назовите причины, увеличивающие стоимость при сокращении длительности.

13. Что такое оптимизация проекта? Какие существуют варианты оптимизации сетевого графа?

14. Какие стадии нужно сокращать в первую очередь, если требуется сократить по времени проект в целом? Какие не следует сокращать совсем?

15. Что такое “коэффициент ускорения” и как его используют в оптимизации сетевых проектов?

16. Как оптимизировать сетевой проект по стоимости? Какие стадии проекта надо сокращать в первую очередь в этом случае?

Задачи для самостоятельного решения к разделу 3

1. Оптимизация сетевого проекта

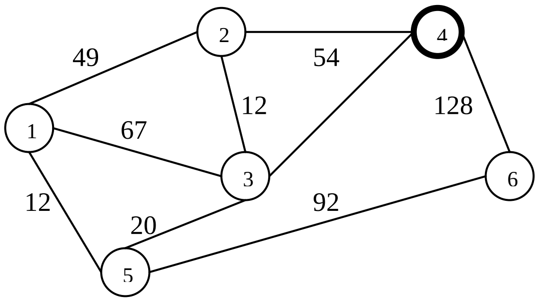
В таблице приведён список работ некоторого проекта при нормальном и срочном режимах его выполнения и коэффициенты ускорения работ.

(1;2)	(1;3)	(1;4)	(2;5)	(3;4)	(3;6)	(4;7)	(5;6)	(5;8)	(5;9)	(6;7)	(7;9)	(8;9)	Работа
8	6	9	4	10	8	12	3	7	5	2	9	8	Норм. режим
6	6	7	3	7	5	8	2	5	4	2	8	5	Сроч. режим
1,5	2	2,3	2,5	1,7	1,3	1,6	1,4	1,8	2,2	2,1	1,7	1	Коэф. ускор.

Построить граф, найти критический путь и его длину, вычислить максимальное число дней, на которое можно сократить выполнение проекта, если на это выделено 8,5 усл. ден.ед.

2. Кратчайший путь между вершинами графа

Компания имеет пять строительных площадок и один склад. Расстояния (в км) между узлами заданы на дугах графа. Надо найти кратчайшее расстояние от склада (узел №4) до каждой строительной площадки. Какова длина кратчайшего пути от склада до вершины №1? Проходит ли этот путь через вершину №2?



3. Минимальные затраты на перевозку груза

Компания осуществляет услуги по грузовым перевозкам между городами края. Большое значение имеет быстрое обслуживание и минимальные затраты на перевозку. Дана сеть дорог. Построить граф и найти кратчайший маршрут от Владивостока до других семи городов. Какова длина пути от Владивостока до города №7. Данные в таблице.

	1	2	3	4	5	6	7
В	35	20		30			
1		20				70	
2			10	15	40	40	
3				30	35		10
4							
5						20	45
6							30

4. Срыв сроков работ субподрядчиком

В таблице приведены данные о стадиях работ строительного проекта.

Стадия	Предшественник	Продолжительность, недели
A	-	11
B	-	16
C	A	4
D	A	6
E	C	6
F	B,C	8
G	B,C	10
H	D,E,F	6
I	B,C	20
J	D,E,F	10
K	G,H	2

Стадия H должна выполняться субподрядчиком. Стоимость работ – 8 тыс. долл. Однако субподрядчик может начать работу только на 6 недель позже запланированного в проекте раннего старта. Каждая неделя отсрочки окончания проекта стоит организаторам 5 тыс. долл.

Рассматривается три возможные альтернативы разрешения проблемы: 1) ждать, пока субподрядчик сможет приступить к выполнению работ;

2) нанять другого субподрядчика, который может приступить к выполнению работ в запланированный по проекту день, выполнит работы по стадии H за 8 недель, но запрашивает сумму 15 тыс. долл.;

3) использовать для выполнения стадии H своих рабочих, которые сейчас работают на стадии E. Это приведёт к удлинению стадии E на две недели и её удорожанию на 5 тыс. долл. Работы по стадии H в этом случае могут быть начаты в срок, но будут выполнены за 10 недель и будут стоить 9 тыс. долл.

Какую альтернативу предпочесть? Управляющий проектом склоняется ко второй. Нарисуйте сетевой график, определите критический путь и время выполнения проекта по первоначальному плану (с помощью MS-Project). Найдите реальные изменения длительности проекта при рассматриваемых альтернативах и сравните издержки.

5. Строительный проект

В таблице приведена информация об этапах строительного проекта. Указаны длительность каждого этапа строительства и стоимость возможного сокращения отдельных этапов на два дня.

Этап	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
Нормальная длит., дни	6	9	11	10	15	9	10	9	15	12	11	9	10	6	14	6	12	10	12	12
Стоимость сокращ на 1-ый день	9	6	8	6	7	-	9	7	8	7	9	5	7	8	6	10	5	9	8	9
Стоимость сокращ на 2-ой день	7	14	18	13	12	-	15	14	15	17	16	15	-	14	13	20	10	18	17	19

Нарисовать сетевой график.

а) Определить критический путь (или пути, если их несколько) и длительность проекта.

б) Сокращая длительность проекта по 1 дню, найти максимально возможный срок его сокращения. Рассчитать минимальную стоимость такого сокращения.

в) Предположим, что сокращение проекта на 1 день приносит дополнительно 15 единиц прибыли. Каков оптимальный срок сокращения проекта.

Часть 4.
Теория игр. Элементы теории принятия решений

Процесс принятия любого управленческого решения – это всегда выбор из нескольких рассматриваемых альтернатив: инвестировать деньги в данный проект или нет? Продать убыточное отделение компании или инвестировать в его реорганизацию? Покупать акции компании A или B, или продавать имеющиеся? Вложить деньги в новое оборудование, чтобы снизить издержки по производству данного продукта? И т.д. Очень часто привлекательность той или иной альтернативы (по сравнению с другими) зависит от того, каким образом будут развиваться события, от того, какой из предполагаемых “сценариев будущего” реализуются. Поскольку человеку не дано достоверно предвидеть будущее, процесс выбора из нескольких альтернатив в таких условиях называют принятием решения в условиях неопределенности и риска. Если невозможно определить вероятности того или иного сценария будущего, говорят о принятии решения *в условиях полной неопределенности*. Если, наоборот, лицо, принимающее решение, имеет те или иные объективные оценки вероятности различных сценариев будущего, говорят о принятии решения *в условиях риска*.

С точки зрения математической теории игр, процесс принятия решений можно представить в виде матричной игры.

4.1.Принятие решений в условиях неопределённости. Позиционные игры

Очень часто игроки делают свой выбор не раз и навсегда, а используя информацию о фактически складывающейся обстановке в развитии конфликта. Здесь на помощь приходят *позиционные игры*. Позиционные игры это бескоалиционные игры, моделирующие процессы последовательного принятия решений игроками в условиях, меняющихся во времени, их называют *условия неопределённости*.

Позиции – это состояние игры, *альтернативы* – это возможный выбор в каждой позиции. Для наглядности используют схему “дерево решений”. В позиционных играх с *полной информаций* игрок перед своим ходом знает ту позицию дерева игры, в которой он находится. Заранее определённую последовательность ходов игрока, выбранную им в зависимости от информации о ходах другого игрока называют *чистой стратегией* этого игрока. В том случае если в игре нет случайных ходов, выбор игроком A и игроком B чистых стратегий однозначно определяет исход игры, т.е. приводит к окончательной позиции, где игрок A получает свой выигрыш. Это обстоятельство позволяет сводить позиционную игру к матричной игре. Процесс сведения позиционной игры к матричной (биматричной) называется *нормализацией позиционной игры.*

<u>Задача №4.1.</u> Фирма A контролирует рынок некоторого товара. Фирма B решает, стоит ли выходить на рынок этого товара. Стратегии игрока B: выходить (B_1) или не выходить (B_2). В свою очередь фирма A решает, стоит ли снижать объём производства этого товара. Стратегии фирмы A: сохранить объём

производства (A_1), сократить объём производства (A_2). Матрицы игры: $A=\begin{bmatrix}8 & 20\\ 10 & 12\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 10 & 0\end{bmatrix}$.

Решение. Построим дерево решений (рис.4.1). Используем теорию решения биматричных игр.

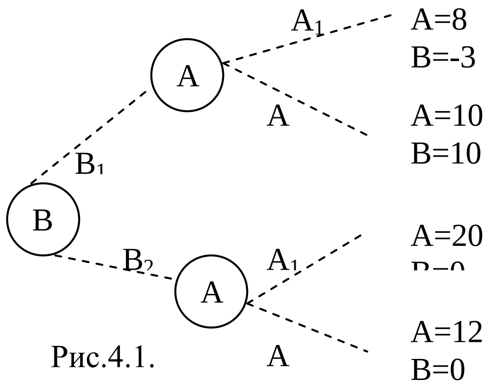


Рис.4.1.

Находим точку равновесия, для этого находим числа: C=8+12-(10+20)=-10 α=12-20=-8; D=-3+0-(10+0)=-13; β=0-10=-10. Решаем системы:

$$\begin{cases}(p-1)(-10q+8)\ge 0,\\ p(-10q+8)\ge 0\end{cases} \text{ и } \begin{cases}(q-1)(-13p+10)\ge 0,\\ q(-13p+10)\ge 0\end{cases}.$$

Первая система даёт результат:

$$\begin{cases}p=1, -10q+8\ge 0, q\le 0{,}8;\\ p=0, -10q+8\le 0, q\ge 0{,}8;\\ 0<p<1, q=0{,}8.\end{cases}$$

Из второй системы получим: $\begin{cases}q=1, (-13p+10)\ge 0,\ p\le \dfrac{10}{13},\\ q=0, (-13p+10)\le 0,\ p\ge \dfrac{10}{13},\\ 0<q<1,\ p=\dfrac{10}{13}.\end{cases}$

Строим чертёж (рис.4.2). Точка равновесия – т. $N\left(\dfrac{10}{13},\dfrac{4}{5}\right)$.

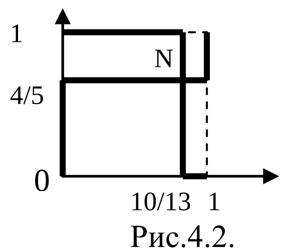


Рис.4.2.

Ответ: Оптимальные стратегии: $S_A^*=\left(\dfrac{10}{13},\dfrac{3}{13}\right), S_B^*=\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{1}{5}\right)$.

Выигрыши игроков:
$$H_A=8\cdot\frac{10}{13}\cdot\frac{4}{5}+20\cdot\frac{10}{13}\cdot\frac{1}{5}+10\cdot\frac{3}{13}\cdot\frac{4}{5}+12\cdot\frac{3}{13}\cdot\frac{1}{5}=\frac{676}{65};$$
$$H_B=-3\cdot\frac{10}{13}\cdot\frac{4}{5}+0+10\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{13}+0=-\frac{18}{13}.$$

В данной игре для игрока В лучше воспользоваться стратегией B_2, тогда его выигрыш, при любо стратегии игрока А будет равен 0.

4.2. Элементы теории статистических решений

Как уже говорилось, в практике, кроме конфликтных, встречаются *ситуации неопределённые*. Она связана не с сознательным противодействием противника, а с недостаточным знанием условий, в которых будет проводиться та или иная операция, т.е. объективной действительности. В теории решений её принято называть *"природой"*. В общем виде игра с природой имеет вид (табл. 4.1).

У игрока А - m возможных стратегий $A_1,A_2,\ldots,A_m$, о которых можно сделать "n" предположений $П_1,П_2,\ldots,П_n$ – стратегий природы, т.е. $П_j$ – условия, в которых принимается решение.

Таблица 4.1. Общий вид "игры с природой"

A	**$П_1$**	**$П_2$**	**…**	**$П_n$**
A_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m1}		a_{mn}

В задаче требуется выбрать такую стратегию A_i (чистую или смешанную), которая наиболее выгодна на фоне других. Методы решения антагонистической игры применить нельзя (нет сознательного противника). Наиболее простой выбор – доминирующая стратегия. Если таковой нет, применяются методы принятия решений, основанные на известных вероятностях условий.

Рассмотрим задачу, приводящую к игре с "природой".

Задача №4.2. Торговая фирма производит два вида продукции. Определить план производства продукции на предстоящий период, обеспечивающий максимальный доход от реализации при цене продажи 80 и 60 ден. ед. за 1 ед. продукции каждого вида. Известно, что при одном состоянии спроса фирма реализует 160 и 120, а при другом – 70 и 150 ед. продукции. Затраты составляют 40 и 30 ден. ед. на одну ед. продукции.

Математическая модель задачи. Фирма располагает двумя стратегиями $F_1(160;120)$ и $F_2(70;150)$. Если фирма примет стратегию F_1 и спрос будет находиться в состоянии D_1 (стратегия рынка), то продукция будет полностью реализована и доход составит: $W_{11}=160(80-40)+120(60-30)=10000.$ При другом состоянии спроса D_2, продукция второго вида будет реализована полностью, а первого вида только в количестве 70ед., а часть останется нереализованной. Доход в этом случае будет: $W_{12}=70(80-40)+120(60-30)-40(160-70)=2800.$ Если фирма выбирает стратегию F_2, а рынок – стратегию D_1, продукция первого вида будет реализована полностью, а второго только 120ед., ещё 30ед не будут реализованы, поэтому доход: $W_{21}=70(80-40)+120(60-30)-30(150-120)=5500.$ И в случае, когда фирма выбирает стратегию F_2 и рынок – стратегию D_2, продукция каждого вида будет полностью реализована. $W_{22}=70(80-40)+150(60-30)=7300.$

Итак, платёжная матрица имеет вид: $W=\begin{bmatrix}10000 & 2800\\ 5500 & 7300\end{bmatrix}$. Находим верхнюю и нижнюю цену игры: $\begin{cases}\alpha=\max(\min)\,a_{ij}=\max(2800;5500)=5500,\\ \beta=\min(\max)\,a_{ij}=\min(10000;7300)=7300, \alpha\neq\beta.\end{cases}$

Седловой точки нет, т.е. решать игру надо в смешанных стратегиях. Цена игры находится в интервале 5500≤V≤7300.

4.3. Методы принятия решения с известными вероятностями условий. Критерий Лапласа

Пусть известны вероятности $Q_j=P(П_j)$, j=1,…,n. Причём $\sum_{j=1}^{n}Q_j=1$. Тогда оптимальной является стратегия, максимизирующая средний выигрыш a_{ij}, рассчитанный для каждой i-ой строки платёжной матрицы. Для подтверждения этого факта вводят понятие риска *Риском* игрока А при использовании им стратегии A_i в условиях $П_j$ называется число $r_{ij}=\beta_j-a_{ij}$, (4.1)

где $\beta_j=\max\limits_i a_{ij}, j=1,...,n$ - выигрыш игрока А, если бы он знал условие $П_j$. Очевидно $r_{ij}\geq 0$. Матрица "рисков" или "матрица потерь" даёт более наглядную картину неопределённой ситуации, чем матрица А. Можно доказать, что оптимальная стратегия A_i, найденная методом Лапласа, будет минимальной средней риска:

$$r_i=\sum_{j=1}^{n}r_{ij}\cdot Q_j, i=1,...,m. \qquad (4.2)$$

<u>*Задача №4.3*</u>. Найти оптимальную стратегию игры, заданной матрицей А (табл.4.2), с заданными вероятностями условий: $Q_j(П)=(0,3;0,2;0,4;0,1)$

Таблица №.4.2. Платёжная матрица

A	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	1	4	5	9
A_2	3	8	4	4
A_3	4	8	6	6

Решение. Находим средний выигрыш по каждой стратегии игрока А:

$$\begin{cases}a_1=1\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}2+5\cdot 0{,}4+9\cdot 0{,}1=4;\\ a_2=3\cdot 0{,}3+8\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}1=4{,}5;\\ a_3=4\cdot 0{,}3+8\cdot 0{,}2+6\cdot 0{,}2+6\cdot 0{,}1=4{,}6.\end{cases} \quad S_A^*=A_3(4{,}8{,}6{,}5).$$

Строим матрицу рисков R, для матрицы А:

Таблица 4.3. Матрица рисков

R	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	3	4	1	0
A_2	1	0	2	5
A_3	0	0	0	3
β_i	4	8	6	9

$$\begin{cases}r_1=3\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}4+0\cdot 0{,}1=2{,}2;\\ r_2=1\cdot 0{,}3+0\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}4+5\cdot 0{,}1=1{,}6;\\ r_3=0\cdot 0{,}3+0\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}4+6\cdot 0{,}1=0{,}6.\end{cases} \quad \min(r_1,r_2,r_3)=r_3=0{,}6.$$

Итак, оптимальная стратегия A_3. Приближённый выигрыш V≈4,6.

Для систематизации процесса выбора решения из нескольких альтернатив, надо оценить выигрыши и потери, к которым приведет выбор каждой альтернативы, при условии реализации каждого из рассматриваемых сценариев будущего. Все выигрыши и потери нужно свести в таблицу (или матрицу) выигрышей и потерь. В этой таблице столько строк, сколько рассматривается альтернатив, и столько столбцов, сколько сценариев будущего.

4.4. Выбор оптимального решения в условиях неопределённости. Критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица

Если вероятности условий неизвестны, их можно оценить объективно, т.е. некоторые условия можно считать более правдоподобными, чем другие. Если это невозможно, т.е. условия природы равновозможные, тогда Q_j=1/n. Если гипотезы $П_j$ располагаются в порядке убывания их правдоподобия, вероятности можно найти из условия: $Q_1 : Q_2 : \ldots : Q_n = n : (n-1) : (n-2) : \ldots : 1; \sum_{j=1}^{n} Q_j = 1.$

Откуда $$Q_j = \frac{2(n-j+1)}{n(n+1)}, \; j = 1,\ldots,n. \qquad (4.3)$$

Если вероятности условий определить не удаётся, можно применить следующие критерии оптимальности.

1. Максиминный критерий Вальда. Согласно этому критерию в качестве оптимальной выбирают ту стратегию A_i, при которой минимальный выигрыш максимален, при этом цена игры: **V=max(mina$_{ij}$).** (4.4)

В этом случае поступают самым осторожным образом, т.е. в худших условиях выбирают максимальный выигрыш. Этот критерий называют критерием *“крайнего пессимизма”*.

2. Критерий минимального риска. Критерий Сэвиджа. Он рекомендует выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение**:** **V=min(max r$_{ij}$)** (4.5)

В этом случае в самой неблагоприятной ситуации (большой риск) выбирают ту стратегию, где риск минимальный. Это тоже критерий пессимизма.

3. Компромиссный критерий Гурвица. Этот критерий рекомендует при выборе оптимальной стратегии не руководствоваться ни крайним пессимизмом, ни крайним оптимизмом. В этом случае оптимальной будет та стратегия, у которой выигрыш $$V = \max_i \{\theta \min a_{ij} + (1-\theta)\max a_{ij}\}, i = 1,\ldots,m. \qquad (4.6)$$

Величина θ - коэффициент осторожности (пессимизма), который изменяется
$$0 < \theta < 1, \rightarrow обычно\, \theta = 0{,}6.$$

При $\theta = 1$ будем иметь критерий Вальда, при $\theta = 0$ - критерий крайнего оптимизма, когда оптимальной считают стратегию, у которой $V = \max(\max a_{ij})$.

Мини-кейс «Компания - Нефть»

Задача №4.4. Рассмотрим в качестве примера некоторую компанию, которая занимается тем, что покупает земли в потенциально нефтеносных районах, некоторое время ждет, а затем принимает решение, бурить скважину или продать землю. В настоящее время фирма владеет землей в нефтеносном районе. Рассматриваются две альтернативы: а) бурить скважину; б) продать землю (цена за этот участок на рынке составляет $150 тыс.). Рассматривается три возможных результата бурения – сценарии будущего: а) нефти нет вплоть до максимально доступной для компании глубины; б) будет найден средний для данного района запас нефти; с) будет найден мощный запас нефти.

Проведенный экономический анализ показывает, что чистые приведенные стоимости альтернативы ‘бурить’ для этих трех сценариев составят:

1) Если нефти нет - потери компании составят прямые издержки бурения скважины на максимальную глубину, а это $700 тыс. 2) Если нефть будет обнаружена, в случае ее среднего запаса – доход компании составит $500 тыс.; а в случае мощного фонтана - $2000 тыс.

Имеющаяся статистика по результатам бурения в этом районе в аналогичных условиях дает следующие вероятности для трех обсуждаемых результатов бурения: нефти нет – p=0,5; средний запас – p=0,9 от всех тех случаев, когда нефть найдена; мощный фонтан – p=0,1 от всех тех случаев, когда нефть найдена. **Какое принять решение: бурить скважину или продать участок?** Строим матрицы выигрышей и потерь (табл.4.4 и 4.5).

Таблица 4.4. Матрица выигрышей (сценарий будущего)

Альтернативы	Нефти нет	Средний запас	Мощный фонтан	α_i
Бурить	-700	500	2000	-700
Продать	150	150	150	150
Максимум	150	500	2000	
Вероятности сценариев	0,5	0,9·0,5= =0,45	0,1·0,5= =0,05	$\sum p=1$

Таблица 4.5. Матрица потерь (упущенных возможностей)

	Сценарий будущего		
Альтернатива	Нефти нет	Средний запас	Мощный фонтан
Бурить	850	0	0
Продать	0	350	1850

Для каждой альтернативы рассчитываем ожидаемый выигрыш и ожидаемые упущенные возможности, используя формулы (4.7 и 4.8):

$$EMV_i = \sum_{j=1}^{n} P_j Q_{ij} \qquad (4.7) \qquad\qquad EOL_i = \sum_{j=1}^{n} P_j \left(Q_j^* - Q_{ij}\right) \qquad (4.8)$$

где Q_{ij} - выигрыш для i-ой альтернативы при условии реализации j-ого состояния окружения; Q^*_j – максимальный выигрыш для j-ого состояния окружения. В результате надо выбрать альтернативу с максимальным ожидаемым выигрышем (EMV) и минимальными ожидаемыми упущенными возможностями (EOL).

EMV_1 =(-700)·0,5+500·0,45+2000·0,05=-25;

EMV_2=150·(0,5+0,45+0,05)=150;

EOL_1=850·0,5+0·0,45+0·0,05=425;

EOL_2=0·0,5+350·0,45+1850·0,05=250.

Видно, что наихудший результат при альтернативе “Бурить”, согласно критерию Лапласа надо выбрать вторую стратегию “продать землю”.

Если нет никакой информации о вероятностях рассматриваемых сценариев будущего, т.е. нет никакого представления о шансах, найти нефть на участке, можно применить критерии принятия решений. Эти критерии помогают систематизировать выбор из нескольких альтернатив в зависимости от отношения к риску.

Первым рассматривают критерий Вальда (максимина), соответствующий логике выбора крайнего пессимизма, который считает, что, какую бы альтернативу не выбрать, все равно получат самый худший вариант (минимальный выигрыш, выраженный отрицательным числом). Поэтому выбирать следует ту альтернативу, где этот минимальный выигрыш максимален

В нашем примере: α_i=(-700; 150), $\alpha=\max\alpha_i=150$.

Согласно логике, землю надо продавать, но тогда надо закрывать бизнес. Очевидно, что любое бизнес-решение содержит риск потерь.

Второй критерий, который надо рассмотреть, критерий Сэвиджа (минимаксных сожалений или минимаксного риска). Его тоже называют критерием пессимизма. С точки зрения бизнеса “самое худшее” это большие упущенные возможности, в которых на равных основаниях учитываются как прямые потери, так и упущенные возможности, т.е. неполученная прибыль.

Для их расчета, используют матрицу рисков (упущенных возможностей).

$r_1=\max(850; 0)=850$; $r_2=\max(0; 350)=350$; $r_3=\max(0; 1850)=1850$, тогда

$$r=\min(850; 350; 1850)=350.$$

Если нефти нет, то правильная альтернатива “Продать” соответствует упущенным возможностям, равным 0 (ничего не потеряно). Если нефть есть, аналогично 0 упущенных возможностей соответствует и сценарию “Средний запас” и “Мощный фонтан”, если выбрана альтернатива “Бурить”. Если нефти нет, а выбрана альтернатива “Бурить”, упущенные возможности равны 850 (150-(-700))тыс.долл. Если нефть есть, то при среднем запасе, упущенные возможности 350 тыс. долл. При “Мощном фонтане” они равны 1850 тыс. долл.

Видим, что наихудший результат (максимум упущенных возможностей) при альтернативе “Бурить” при сценарии “Мощный фонтан”. Следовательно, согласно критерию минимаксных сожалений надо выбрать альтернативу бурить.

Этот критерий совпадает в данном случае с критерием максимакс,

$\alpha=\max(\max a_{ij})=\max(2000,150)=2000$ тыс. долл.

Вывод: Систематическое применение критериев “сожаления” несомненно, приводит к потере бизнеса, (в случае максимина – из-за нежелания брать на себя какой-нибудь риск потерь, в случае минимакса – из-за неоправданного стремления к максимальному выигрышу). В этом сложность принятия решения в условиях полной неопределенности, поэтому, для рационального принятия решений необходимо хотя бы грубо оценить вероятности (шансы) различных сценариев будущего. Если это сделано, проблему принятия решений классифицируют как выбор альтернатив в условиях риска.

4.5. Принятие решения в условиях риска

Решение задачи №4.4 с помощью MS-Excel. Пусть на основании результатов бурения соседних участков другими компаниями, в 50 случаях нефть не была найдена, в 30 случаях были обнаружены запасы, близкие к средним, в 20 случаях забил мощный фонтан. Исходя из этих данных, можно получить оценки вероятностей рассматриваемых сценариев: p_1=0,5; p_2=0,3; p_3=0,2. Оформим данные задачи на листе MS-Excel.

Таблица 4.6. Расчет ожидаемой ценности альтернатив задачи №4.4

	A	B	C	D	E	F	G
1	Сценарий будущего						
2		Нефти нет	Средний запас	Мощный фонтан	EMV		
3	Альтернативы						
4	Бурить	-700	500	2000	200	=Сум.пр.(B4:D4;$B$7:$D$7)	
5	Продать	150	150	150	150	=Сум.пр.(B5:D5;$B$7:$D$7)	
6	Максимум	150	500	2000	625	=Сум.пр.(B6:D6;$B$7:$D$7)	
7	Вероятности	0,5	0,3	0,2			
8				EVPI=	425	=F6-MAX(F4:F5)	
10	Таблица упущенных возможностей						
11		Состояние окружения					
12		Нефти нет	Средний запас	Мощный фонтан	EOLI		
13	Альтернативы						
14	Бурить	850	0	0	425	=СУМ.ПР.(	
15	Продать	0	350	1850	425		
16	Вероятности	0,5	0,3	0,2			

1. Рассчитаем для каждой i-той альтернативы величины EMVI по формуле (4.7), после чего выбираем ту альтернативу, для которой EMVI – max.

У нас max(200, 100)=200. Это и есть средний выигрыш компании, если она ее выберет. Руководствуясь критерием Лапласа, компания в данном конкретном случае должна быть готова к 50% потерям. Однако, в долгосрочной перспективе при многократном применении (при наличии большого числа участков) подобного решения принцип максимум EMV обязательно обеспечит перевес выигрышей над потерями.

2. Вместо критерия Лапласа (max EMV), можно было использовать критерий минимума упущенных возможностей (критерий Гурвица). Для этого используем матрицу рисков, это (14)-(15) строки таблицы №4.6.

Видим, что min упущенных возможностей (425 тыс. долл.) также соответствует альтернативе “Бурить”. Это строгий математический вывод: максимум прибыли соответствует минимуму упущенных возможностей.

4.6. Стоимость совершенной информации

Информация называется совершенной, если вероятность ее ошибки равна 0. Допустим, в случае данной компании имеется возможность точно использовать новейшую геофизическую методику исследования недр, которая дает абсолютно достоверный результат. Возникает вопрос о справедливой стоимости совершенной информации?

Стоимость информации не зависит от того, какой сценарий будущего она предскажет. Для ответа на поставленный вопрос, надо заметить, что владение такой информацией позволяет получить максимум того, что можно извлечь из данного сценария.

Допустим, что геофизики предскажут, что нефти на участке нет. Тогда компания может продать землю и получить 150 тыс. долл. Если есть средний запас нефти – то компания получит 500 тыс. долл., если большой запас, то 2000 тыс. долл. До начала подобного исследования компания может оценить вероятность того или иного прогноза на основании имеющейся статистики (например, 50%, 30%, 20%). Пусть у компании 100 участков, тогда примерно на 50 из них геофизики предсказали бы отсутствие нефти, на 30 – средний запас, на 20 – мощный фонтан. Тогда компания получила бы с 30 участков 15000 тыс. долл., с 20 участков – 40000 тыс. долл., а за 50 (продаст) – 7500 тыс. долл. В итоге 62500 тыс. долл., в среднем за один участок 625 тыс. долл., а не 200 (как было рассчитано по критерию). Ожидаемая ценность решения 625-200=425(тыс. долл.), это и есть верхняя граница (предельная цена) справедливой стоимости совершенной информации. Если геофизики просят меньше, то можно заплатить, если больше – не выгодно, предельная цена EVPI=425 тыс. долл. В реальности методика геофизиков не точная, поэтому стоимость информации меньше EVPI.

4.7. Анализ устойчивости выбора оптимальной стратегии

Согласно решению компании следует выбрать альтернативу “Бурить”. Однако, принимая ответственное управленческое решение, необходимо проверить, насколько чувствителен сделанный выбор к изменению прогнозных параметров и оценок вероятностей, с помощью которых были вычислены EMV для каждой альтернативы.

Так как из условия задачи неизвестны прогнозные параметры, на основе которых получены значения выигрышей и потерь, поэтому провести анализ устойчивости по этим параметрам провести невозможно. Но можно рассмотреть влияние оценок вероятностей различных сценариев, тем более что именно в этих оценках коренится основная причина неустойчивости решения о выборе из нескольких альтернатив. В случае данной компании можно оценить ошибку, если оценить вероятности условий. По формуле для стандартной ошибки в определении вероятности по выборке $\frac{\Delta p}{p} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$, где – N размер выборки.

Так как компания оценивала вероятности обнаружения нефти на участке, основываясь на результатах бурения на 100 соседних участках, то типичная статистическая ошибка такой оценки 10%. Выборочное распределение оценки приближается к нормальному распределению. Поэтому с вероятностью β=0,95 можно утверждать, что она отклоняется от неизвестного истинного значения “р” не более чем на 2Δр. Будем изменять значения вероятностей сценариев будущего в пределах статистической ошибки.

Так как наиболее критичным для анализа является сценарий “нефти нет”, увеличим вероятность этого сценария за счет других (табл. №4.7).

Таблица 4.7. Анализ устойчивости выбора решения задачи №4.4

	Нефти нет	Средний запас	Мощный фонтан	EMV
Альтернативы				
Бурить	-700	500	2000	65
Продать	150	150	150	150
Максимум	150	500	2000	532,5
Вероятности	0,55	0,3	0,15	
			EVPI=	382,5
	Нефти нет	Средний запас	Мощный фонтан	EMV
Альтернативы				
Бурить	-700	500	2000	65
Продать	150	150	150	150
Максимум	150	500	2000	532,5
Вероятности	0,52	0,3	0,18	
			EVPI=	438

В таблице показано, как меняется EVPI при небольшом увеличении вероятности условия “Нефти нет”, p_1=0,55. Это снизит EMV “Бурить” в 3 раза (65) и делает ее в 2 раза меньше, чем EMV “Продать” (150). Увеличение p_1 на 0,02 (p_1=0,52) практически уравнивает альтернативы (146≈150), это означает, что для рационального выбора между “Бурить” и “Продать” необходимо знать вероятности сценариев с точностью до 0,01, а это требует статистики N=10000, которой у компании нет.

Вывод: Рациональный выбор между альтернативами без дополнительной информации невозможен. Если требуемая плата за совершенную информацию превысит стоимость решения, то этот выбор невозможен вообще. И, либо надо довериться интуиции и бурить, либо “спрятаться” за критерий “максимина”, и участок продать. Чем больше различие между EMV_1 (бурить) и EMV_2 (продать), тем ниже стоимость совершенной информации. Она максимальна в случае, когда ценности альтернатив почти одинаковы, т.е. чем сложнее различить сравниваемые альтернативы, тем более остро нуждаемся в дополнительной информации, тем выше ее стоимость.

Рассмотрим ещё одну задачу выбора альтернатив.

Мини-кейс “Кредит”

Задача №4.5. Банк рассматривает вопрос о возможном кредите 1 млн. долл. новому клиенту – производственнику. Основываясь на опыте работы с такого рода фирмами, банк подразделяет их по степени риска невозврата кредита на три группы: рискованные, средние, надёжные. Вероятности принадлежности клиента к той или иной группе приведены в табл. 4.8. В случае частичного или полного невозврата кредита банк теряет в среднем 50% кредита. При этом банк получает в среднем 15% прибыли на вложенные деньги. А в группе надёжных клиентов – в среднем 30% на вложенные средства. Банк может воспользоваться услугами аудитора фирмы для уточнения статуса нового клиента. Стоимость аудиторской проверки 5 тыс. долл. Банк имеет опыт работы с этой аудиторской фирмой и оценивает адекватность оценки ею платёжеспособности клиента следующим образом (табл. 4.9).

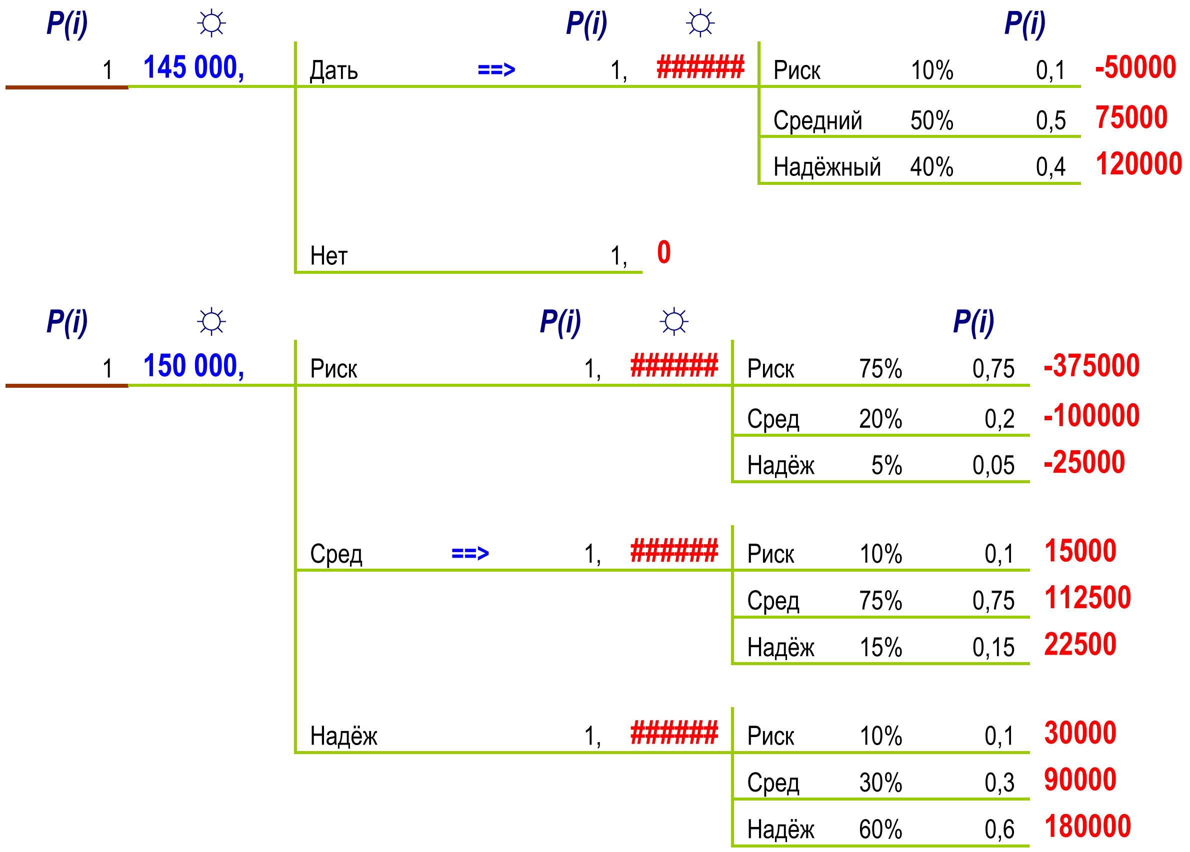
Таблица 4.8. Вероятности принадлежности клиентов к группам

	Рискованные	Средние	Надёжные
Доля вероятности	0,14	0,5	0,4
Выигрыш (потери)	-500	150	300

Таблица 4.9. Адекватность оценки платёжеспособности

	Реальный статус, %		
Оценка аудитора	Рискованные	Средние	Надёжные
Рискованные	75	20	5
Средние	10	75	15
Надёжные	10	30	60

В задаче надо: а) оценить оптимальную альтернативу банка и стоимость совершенной информации без обращения к услугам аудиторской фирмы. б) Стоит ли обращаться к аудиторам в данном случае? Нарисовать дерево альтернатив и проанализировать, с учётом возможной дополнительной информации от аудиторской фирмы; в) Как изменятся полученные оценки, если вероятность принадлежности клиента к рискованному типу увеличить до 20%. При этом можно считать, что вероятности средней и надёжной оценки клиента уменьшатся на одну и ту же величину? Решение с помощью MS-Project.



Ответ: а) Оптимальный выбор – дать кредит, EMV=$145тыс., стоимость совершенной информации - $50тыс.

б) При найме аудиторской фирмы EMV=$163тыс.

в) Без найма: EMV=$72,5тыс., если с наймом, EMV=$130,25тыс.

Контрольные вопросы к разделу 4

1. Основные понятия теории игр. Матричные игры. Что такое платёжная матрица?

2. Какая стратегия называется оптимальной?

3. Как определить верхнюю и нижнюю цену игры? Что такое седловая точка? Устойчивость оптимальных стратегий в случае седловой точки.

4. Сформулируйте принцип maxmin и minmax для определения оптимальных стратегий антагонистической игры.

5. Что такое смешанные стратегии? Решение матричной игры в смешанных стратегиях.

6. Какая стратегия называется активной?

7. Какие ситуации приводят к биматричным играм? Как найти средний выигрыш игроков в такой игре?

8. Ситуация равновесия в биматричной игре. Как определить равновесные ситуации?

9. Позиционные игры. В каком случае игрок перед своим ходом знает позицию дерева игры, в которой он находится, а в каком – нет?

10. Позиции и альтернативы. Как построить дерево игры?

11. Позиционные игры с полной и неполной информацией. Что значит "исход игры"?

12. Сформулируйте ситуации, которые приводят к понятию "*игры с природой"*. Каков общий вид "игры с природой"?

13. Чем отличаются ситуации принятия статистических решений в условиях неопределённости и риска?

14. Сформулируйте "*Критерий Лапласа*", выбора оптимальной стратегии в условиях риска, т.е. когда известны вероятности отдельных альтернатив.

15. Какие критерии можно использовать для определения оптимальной стратегии в условиях неопределённости?

16. Сформулируйте *"Критерий Вальда*", почему его называют критерием крайнего пессимизма? Как выбрать оптимальную стратегию по данному критерию?

17. Сформулируйте *"Критерий Сэвиджа*", почему его называют критерием пессимизма? Как его применить?

18. Сформулируйте компромиссный *"Критерий Гурвица*", почему его так называют? Как выглядит формула для выбора оптимальной стратегии?

19. Что называется "*совершенной информацией*", её стоимость?

20. Что значит справедливая стоимость совершенной информации?

21. В чём заключается анализ устойчивости выбора оптимальной стратегии?

Задачи для самостоятельного решения к разделу 4

4.1) Модель “Торговая фирма”

Торговая фирма производит два вида продукции. Анализ спроса с учётом конъюнктуры рынка по данным наблюдений за несколько лет показал, что спрос на её продукцию не поддаётся прогнозированию, но может находиться в двух состояниях. Составить математическую модель задачи. Определить план производства на предстоящий период, обеспечивающий максимальный доход от реализации при цене продажи 100 и 100 ден. ед. за единицу продукции по каждому из видов соответственно, если известно, что при одном состоянии спроса фирма реализует 250 и 100 ед. продукции, а при другом 150 и 400 каждого вида соответственно. Затраты составляют 75 и 65 ден. ед. на единицу каждого вида продукции соответственно.

4.2) Модель биматричной игры

Решить биматричную игру, если платёжные матрицы игроков имеют вид:

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.3) Закупка скоропортящейся продукции

Владелец магазина в начале каждого дня закупает для реализации скоропортящийся продукт по цене 50 руб. за единицу. Цена реализации этого продукта – 80 руб. за единицу. Из практики известно, что спрос на этот продукт за день может быть равен 1, 2, 3, или 4 единицы. Если продукт за день не продан, то в конце дня его всегда покупают по цене 30 руб. за единицу.

Возможные исходы	1	2	3	4
Частота	10	20	30	40

Пользуясь правилами максимакса, максимина, минимакса, максимальной вероятности, критерием Гурвица и максимизируя ожидаемый доход, определить, сколько единиц этого продукта должен закупать владелец каждый день.

4.4) Две стратегии

Управляющий предприятием рассматривает две стратегии развития предприятия: А и В. Он оценивает доход при реализации этих стратегий в зависимости от общего состояния экономики в стране, так как это показано в таблице выигрышей.

Таблица выигрышей

	Экономика	
	стабильная	**изменяющаяся**
Стратегия А, $	50000	20000
Стратегия В, $	10000	80000

Стабильный прогноз для экономики управляющий считает в 4 раза более вероятным, чем прогноз имеющейся экономики. Но это его субъективная оценка, он хотел бы её уточнить. Показатели НИИ экономики следующие:

Характеристики надёжности подобных прогнозов

	Реальность	
Прогноз	**стабильная**	**изменяющаяся**
Стабильная	0,88	0,08
Изменяющаяся	0,12	0.92

а) Какую стратегию должен предпочесть управляющий, если он всё же решит не обращаться в НИИ экономики?

в) Если управляющий решит обратиться за консультацией, какие будут апостериорные вероятности относительно состояний экономики?

с) Консультант требует 3 тыс. долл. за проведение исследований. Стоит ли пользоваться его услугами? Построить дерево решений.

4.5) Компания “Обувь для всех”

Компания предполагает заменить старую машину по пошиву обуви на более современное оборудование. Новое оборудование стоит 10 млн. долл., и компания предлагает продать свою старую машину за 1 млн. долл. Благодаря применению новой машины ожидается снижение производственных издержек с 8 долл. на пару до 4 долл. Как показано в приведённой ниже таблице, существует неопределённость относительно будущего объёма продаж и эксплуатационных характеристик новой машины:

	Пессимистичные P=1/3	Ожидаемые P=1/3	Оптимистичные P=1/3
Продажи, тыс. пар	400	500	700
Производственные издержки с новой машиной, $/пара	6	4	3
Срок службы новой машины	7 лет	10 лет	13 лет

Параметры продаж, срок службы и производственные издержки независимы друг от друга, т.е. с издержками соответствующим, например, оптимистичному прогнозу, срок службы и уровень продаж может быть любыми, скажем 7 лет и 500 тыс. и т. д.

а) Построить дерево решений. Принять наилучшее решение – покупать машину или нет?

б) Какова ожидаемая величина прибыли?

Ставка дисконта равна 12% Отпускная цена пары обуви – 10 долл.

Дополнительные издержки, например, налоги не учитывать.

Часть 5.
Управление запасами

5.1. Модели экономически выгодных размеров заказываемых партий

Для большинства производственных и торговых фирм актуальной задачей является снижение уровня товарных запасов. Многие объявляют запасы корнем всех зол в организации производства, однако все фирмы имеют различные запасы готовой продукции, сырья и материалов на складах. Причина в том, что запасы выполняют некоторые необходимые функции, без которых нормальный бизнес невозможен.

Основные функции запасов. *1). Обеспечить работоспособность фирмы в условиях сильно варьирующего (изменяющегося во времени) спроса*. Это первая и основная цель формирования заказа. Если потребитель не получит товара, который он ждёт от поставщика, в срок, он может переключиться на другого поставщика, а это урон для фирмы. Запас необходим ещё и потому, что при резком увеличении спроса (числа заявок), время выполнения заказа может быть большим. В случае сезонных колебаний спроса, возможность для производственной фирмы работать “на склад” в период снижения спроса и удовлетворять высокий спрос за счёт накоплений способствует ритмичной работе фирмы, сохранению постоянной численности работающих.

2). Смягчить эффект от сбоев (нестабильности) в поставке сырья или в доставке товаров от поставщиков. Любая производственная, а особенно торговая фирма обязательно зависит от поставщиков, поэтому запасы сырья, материалов или готовой продукции совершенно необходимы. Причин нестабильности очень много: задержки и потери при транспортировке, сбой производства, недостаток сырья и материалов у поставщика, забастовки и т.д. Основная гарантия от этих неприятностей у фирмы – потребителя это наличие безопасного резервного запаса.

3). Обеспечить независимость различных операций по производству продукта. Каждое рабочее место в производственной линии является одновременно и потребителем материалов, блоков, узлов, получаемых от предшествующих стадий производства, поэтому буферные запасы деталей и материалов перед каждым рабочим местом совершенно необходимы.

4). Обеспечить возможность гибкого планирования производственного процесса. Если известен план производственных заказов на конечный продукт, можно каждую неделю производить ровно столько, сколько требуется. Но если потребуется, например, переналадка производственной линии для выпуска продукции, что требует время, целесообразнее и экономичнее за один прогон произвести продукции на несколько недель вперёд.

5). Снизить затраты на подачу, оформление и доставку заказов от поставщиков. Формирование, оформление, размещение заявки на новый заказ требует определённых издержек (оплата труда, расходы на связь, транспорт и т. п.) Т.е., чем больше размер заказа, тем реже приходится оплачивать эти расходы.

Но этим факторам, побуждающим фирму к формированию запасов, противостоит фактор высоких издержек при хранении большого количества запасов. Где “золотая середина”, решать менеджерам. В каждой конкретной ситуации своё оптимальное решение. Фундаментальный вопрос управления запасами: Какова должна быть величина товарного запаса на складе, чтобы минимизировать складские издержки и обеспечить определённый уровень обслуживания клиентов?

Издержки по формированию и содержанию запасов. К основным видам складских издержек (в условиях определённого спроса) надо отнести:

1). Издержки хранения. Это переменные издержки, они пропорциональны количеству единиц хранимых запасов и стоимости единицы запаса. Основную часть этих издержек составляют упущенные возможности при альтернативном использовании капитала “замороженного” в запасах. Капитал, вложенный в запасы, не даёт определённого процента дохода, если товар приобретён в кредит, то за этот кредит надо платить проценты. Кроме того, товар должен быть застрахован и подлежит налогообложению. Страховка и налог на запас тоже входят в издержки. Перечисленные издержки пропорциональны стоимости запасов, их удобно задавать в расчёте на ед. запаса в год. Будем обозначать *удельные издержки хранения* буквой H, её размерность – ден. ед./ед. запаса в год, или буквой h – процент от стоимости единицы запаса C при хранении этой ед. в течение года. Суммарные предельные издержки хранения будут пропорциональны количеству хранимых единиц и времени хранения, а коэффициентом пропорциональности будет H. Временной интервал может быть неделя, квартал, год. В качестве базового временного интервала чаще используют год. Часто при ведении бухгалтерского учёта в издержки хранения включают прямые расходы на содержание склада: аренду здания, оплату персонала, охраны и т.п., хотя эти издержки относятся к категории складских издержек и являются постоянными.

2). Издержки по запуску новой партии продукции (производство), или затраты на формирование и оформление заказа (торговля). Это постоянные издержки. Они не зависят от величины заказа. Эти издержки в торговле связывают чаще всего с оплатой труда менеджеров, с офисными расходами при оформлении и размещении заявки поставщику на новый заказ и т.п., причём транспортная издержка может составлять большую часть расходов S по оформлению, размещению и доставке заказа. Размерность S –ден.ед./на один заказ, они не зависят от размера заказа, однако, чем больше размер заказа, тем реже приходится оплачивать расходы на его оформление.

3). Штраф за дефицит. В большинстве эти издержки оценивают как упущенную прибыль от продажи ед. товара. Но ущерб от дефицита для фирмы будет гораздо серьёзнее, если неудовлетворённый клиент переключится на другого поставщика. Поэтому в большинстве моделей управления запасами дефицит стремятся исключить.

4). Потери от необходимости распродажи залежалого товара. В большинстве моделей эту издержку стремятся включить в удельные издержки хранения H. Смысл этой издержки очевиден. Любой товар, пищевые продукты, одежда или модели машин, подвержен физическому и моральному старению и по истечению характерного для него периода должен быть уценён или вовсе списан (если его употребление стало невозможным). Величина этой издержки равна продажной цене ед. нового продукта минус продажная цена уценённой ед.

5.2. Формула для экономичного размера заказа или классическая задача управления запасами

Постановка задачи. Под задачей управления товарными запасами (ЗУЗ) понимается такая оптимизационная задача, в которой задана информация: о поставках товара; о спросе на товар; об издержках и условиях хранения товарных запасов; о критерии оптимизации.

Основные допущения и параметры модели экономичного размера заказа

Работа реального склада обычно сопровождается множеством отклонений от идеального режима. Это может быть не тот объём партии товара, который был заказан, не в те сроки, задержка с разгрузкой и т.д. Учесть все эти отклонения практически невозможно, поэтому при моделировании этого процесса делают следующие предположения: 1) Спрос на запас постоянный (не зависит от времени) и составляют D единиц в год;

2) Закупочная цена единицы запаса постоянна (не зависит от размера закупаемой партии) и равна C усл. ден. ед.;

3) Издержки хранения единицы запаса в год равны H (или h% стоимости ед. запаса C).

4) Стоимость оформления одного заказа (или переналадки оборудования для начала новой партии продукции) равна S усл. ден. ед.

Все эти допущения сильно упрощают модель по сравнению с реальным бизнесом, но их вначале принимают, чтобы получить простую формулу для расчёта оптимального размера заказа. Более реальные ситуации можно проанализировать с помощью MS-Excel.

Пусть в начальный момент времени на склад приходит новая партия данного товара объёмом q, с течением времени товарный запас уменьшается с постоянной скоростью на d ед. в день и через некоторое время обращается в ноль. Если заблаговременно сделать заявку на такую же по величине партию товара и при этом “подгадать” так, чтобы она пришла как раз тогда, когда весь запас товара на складе исчерпан, т.е. товарный запас снова поднимется до величины q и снова будет уменьшаться с постоянной скоростью и т.д. (рис.5.1). Если ежедневный спрос на товар d, а время выполнения заявки поставщиком L, то новую заявку надо делать тогда, когда на складе осталось $d \times L$ ед. запаса товара. Если каждый раз заказывать партию одного и того же размера, то при годовом спросе D нужно повторить этот цикл D/q раз. Причем, в общем случае можно считать, что если закупается партия товара величиной q и этот запас линейно уменьшается до 0, то его средний уровень будет q/2. Тогда годовые издержки хранения равны

$$T_H = \frac{q \cdot H}{2}, \tag{5.1}$$

очевидно, чем меньше партия товара, тем меньше издержки, но в этом случае надо чаще делать заказ, т.е. возрастают издержки оформления заказа.

Годовые издержки на оформление заказа будут равны

$$T_S = \frac{D \cdot S}{q}. \qquad (5.2)$$

Полные складские издержки за год составят:

$$T = \frac{q \cdot H}{2} + \frac{D \cdot S}{q}, \qquad (5.3)$$

первое слагаемое линейно растет с ростом величины q, а второе убывает обратно пропорционально q. Решив классическую задачу анализа на экстремум, получим оптимальный размер заказа, обеспечивающий minT(q).

$$T' = \frac{H}{2} - \frac{DS}{q^2} = 0, \text{ откуда} \quad q^* = \sqrt{\frac{2D \cdot S}{H}}, \qquad T_{\min} = \sqrt{2DSH}. \qquad (5.4)$$

При этом годовые издержки хранения и оформления заказа равны:

$$T_H = T_S = \frac{\sqrt{2DSH}}{2}. \qquad (5.5)$$

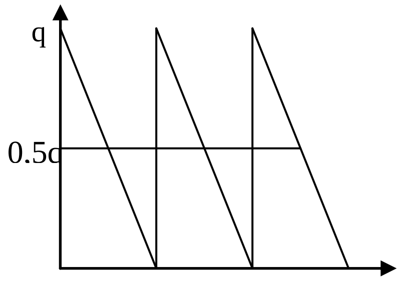


Рис.5.1.

Изменение товарного запаса со временем

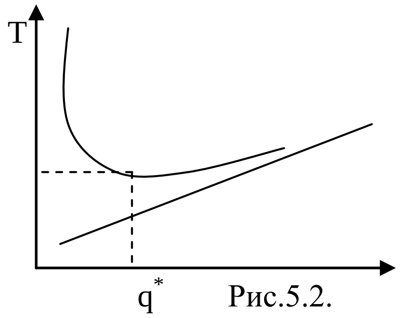


Рис.5.2.

Зависимость полных издержек от заказа.

<u>Задача №5.1</u>. На склад доставляется товар по 1500т в сутки. В день со склада потребители забирают 50т товара. Расходы по доставке партии товара (накладные расходы) 2000 руб. Удельные издержки хранения 1т товара в течение суток 0,1 руб. Требуется определить: 1) Длительность цикла, среднесуточные накладные расходы и среднесуточные издержки хранения товара; 2) Оптимальный размер заказываемой партии товара и расчётные характеристики работы склада в оптимальном режиме. Приведём аналитическое решение.

Решение. Параметры работы склада: скорость расходования товара D=50т/сут.; расходы по доставке S=2000руб. -1-партия товара; удельные издержки хранения H=0,1руб./сут. Партия доставляемого товара 1500т/сут.

1) Длительность цикла n=q/D=1500/50=30(сут.). Среднесуточные накладные расходы S/n=2000/30≈67(руб./сут.); среднесуточные издержки хранения H·q/2=0,1·1500/2=75(руб./сут.).

2) Оптимальный размер заказываемой партии

$$q^* = \sqrt{\frac{2SD}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000 \cdot 50}{0{,}1}} \approx 1400\text{т}$$

Оптимальный средний уровень запаса: $q^*_{опт} = q^*/2 = 700$т.

Оптимальный период пополнения запасов: $n^* = q^*/D = 1400/50 \approx 28$(сут.).

Оптимальные средние издержки хранения запасов:

$$H^* = q^* \cdot H = 700 \cdot 0{,}1 = 70\text{руб./сут.}$$

Проблемы применения оптимального решения на практике.

Все три параметра D, S, H – оценки, а не точно известные измеряемые параметры. Годовой спрос (D) –это прогноз, который обычно делают на основе исторических данных. В реальности он не бывает строго постоянным, поэтому говорить можно только о среднем годовом спросе D ($D \pm \Delta D$). Удельные издержки хранения запаса H и издержки оформления заказа H тоже приближенные значения, их оценка в значительной степени зависит от эффективности работы менеджера. Кроме того, на складе обычно не один товар, а тысячи различных артикулов товаров. Если считать оптимальный размер заказа для каждого, появятся свои даты перезаказа для каждого артикула, а это практически неосуществимо, т.е. товары надо сгруппировать (например, по поставщикам) или делать заказ для группы товаров с близкими датами перевозки. Но тогда размер заказа для каждого из них не будет оптимальным. Поэтому возникает два вопроса.

1**)**. Как влияют неточности в определении параметров модели D, S и H на размер оптимального заказа q^*?

2). На сколько сильно увеличиваются полные издержки для товара за год, если размер заказа немного отличается от оптимального?

Анализ устойчивости оптимального решения

Начнем с вопроса №2. Обозначим за $q_0 = \dfrac{q}{q^*} = q \cdot \sqrt{\dfrac{H}{2DS}}$, где q_0 - размер заказа в долях от оптимального заказа (величина безразмерная). Тогда издержки, если

$$q = q_0 \cdot q^* = q_0 \sqrt{\frac{2DS}{H}}, \quad T = \frac{\sqrt{2DSH}}{2}\left(q_0 + \frac{1}{q_0}\right) = T_0\left(q_0 + \frac{1}{q_0}\right), \text{ где } T_0 = \frac{\sqrt{2DSH}}{2}.$$

T_0 - минимальное значение каждой из двух компонент полных издержек, т.к. они равны, минимальное значение полных издержек будут $T_{min}=2T_0$.

На рис.4. изображен график зависимости полных издержек в относительных координатах T/T_0, q/q^*, при размере заказа $q_0=1$, ($q=q^*$) $T=2=2T_0$. Это универсальная кривая, не зависящая от D, S, H и выводы, полученные при ее анализе, будут справедливы во всех случаях.

Вывод: кривая очень пологая вблизи минимума. Изменение размера заказа q от о,4q^* до 1,8q^*, приводит к возрастанию T(q) над своим минимальным значением меньше, чем на 25%. При изменении его по сравнению с q^* на 20%, возрастание издержек не превысит 3-5%. А при изменении q на 10%, отклонение будет меньше 1-2%.

Т.е. размер заказа можно варьировать в пределах 10-20%, без риска значительно увеличить издержки, но при увеличении (уменьшении) размера заказа, например в 10 раз, издержки сильно увеличатся.

Рассмотрим, как влияют параметры D, S, H на T? Так как D, S, H стоят под знаком корня, то их изменение, например в 4 раза, изменит q^* только в 2 раза. При этом величина T изменится не более чем на 30%. Отсюда *вывод*: при малых относительных изменениях параметров (на 10-20%) относительное изменение вдвое q^* меньше (5-10%), что практически не скажется на величине полных издержек. Т.е. модель экономического размера заказа устойчива, поэтому ее можно рассматривать как ориентир в решении других задач управления запасами.

5.3. Модификации модели экономичного размера заказа

На практике обычно рассматривают две модификации задачи, которые позволяют использовать основную модель, с добавлением некоторых дополнительных условий. Это: *1) Модель производства оптимальной партии продукции.* Речь идет о запасах, создаваемых на производстве, между двумя различными этапами производственного процесса. *2) Модель планирования дефицита*. Речь идет об управлении дорогостоящими товарными запасами, когда появляется система заказов.

1. Модель производства оптимальной партии продукции

Для вывода формулы рассмотрим пример на производство продукции некоторой компанией.

Задача №5.2. Компания в среднем производит 150ед. товара в день. Спрос – 40 ед. товара в день. Годовые издержки хранения 8 руб./ за ед. в год. Расходы по производству 1 единицы товара 100руб. Найти экономичный размер партии и минимальные издержки.

Формула для оптимального размера. Ситуация отличается от предыдущей задачи тем, что максимальный уровень запаса деталей не равен, а меньше, чем размер партии продукции, выпущенной линией. В момент запуска линии запаса деталей (А) уже нет, она израсходована в течение месяца. Поэтому конвейер начинает потреблять детали (А) сразу же, по мере их выпуска. Так как линия выпускает детали быстрее, чем их потребляет конвейер (p>d), запас их все время растет, но медленнее, чем, если бы конвейер стоял, а все детали шли на склад (рис.5).

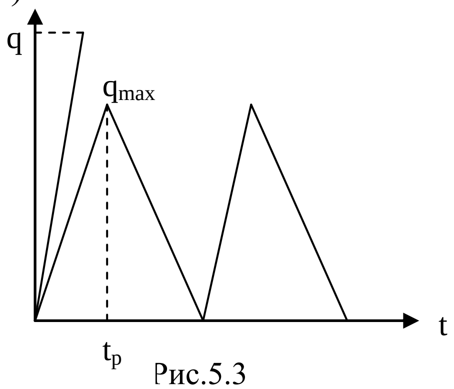


Рис.5.3

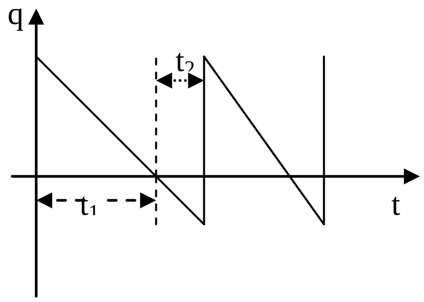


Рис.5.4.

Зная расчетное время можно записать, что размер выпущенной партии равен $q = p \cdot t_p$, количество использованных деталей $q_{исп} = d \cdot t_p$, а величина созданного запаса за это время равна

$$q_{\max} = (p-d) \cdot t_p = q \cdot \frac{(p-d)}{p}, \qquad (5.6)$$

т.е. меньше, чем размер выпущенной партии q. С момента t_p и до начала следующего запуска линии этот запас будет уменьшаться до 0. График изменения величины буферного запаса показан на рис.5.

Поскольку максимальный уровень буферного запаса равен q_{max}, а не размеру партии продукции q, то именно q_{max} фигурирует в выражении для издержек хранения за год. Подставляя (5.6) в выражение для издержек хранения T_H и сохраняя q в выражении для издержек, связанных с запуском новой партии T_S (аналог издержек оформления заказа в модели q^*), получим выражение для оптимального размера партии и полных издержек хранения запаса.

$$q_1^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}} \cdot \sqrt{\frac{p}{p-d}}; \qquad T = T_H + T_S = \frac{p-d}{2p} \cdot qH + \frac{D}{q} \cdot S. \qquad (5.7)$$

Решение. Параметры работы линии по производству: скорость производства p=150 ед/день; скорость потребления d=40ед./день; годовые издержки H=8руб./за ед. в год.; расходы по наладке линии для производства товара S=100руб./за ед.тов.

Находим количество товара, произведённое линией за год: p=150·365=54750(ед.тов. в год) и количество потреблённого товара за год: d=40·365=14600ед./год. Тогда оптимальный размер произведённой партии товара и издержки будут: $q^* = \sqrt{\frac{2dS}{H} \cdot \frac{p}{p-d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 14600}{8} \cdot \frac{54750}{54750-14600}} \approx 705 ед.$

$$T^* = \frac{d}{q} \cdot S + \frac{p-d}{2p} \cdot q \cdot H = \frac{100 \cdot 14600}{705} + \frac{8(54750-14600) \cdot 705}{2 \cdot 54750} \approx 4138{,}9 руб./год.$$

Ответ: Произведя 705 ед. товара, линию по производству останавливают, реализация товара не должна остановиться. Как только товар закончится, тут же запускают производственную линию. Число циклов $n = \frac{d}{q^*} = \frac{14600}{705} \approx 21$, интервал между циклами $\frac{1}{n} = \frac{q^*}{d} = \frac{705}{14600} \approx 0{,}048 лет \approx 18 дней.$

Рассмотрим ещё один пример на модель производства оптимальной партии продукции с решением в MS-Excel и анализом полученного решения.

Мини-кейс «План работы универсальной производственной линии»

Задача №5.3. Рассмотрим план работы универсальной производственной линии. Производственная линия может выпускать различные детали для сборочного конвейера. Каждый раз при необходимости производства партии деталей вида А линия должна быть остановлена для проведения наладочных работ, стоимость которых S=1000 долл. Линия выпускает этих деталей p=2000 шт./месяц (скорость производства). Потребность в деталях (А) d=500 шт./месяц (6000шт./год) (скорость их потребления конвейером). Время работы линии по выпуску данной партии t_p (¼ месяца ≈ 7 дней). Остальные детали образуют запас. Издержки хранения одной детали составляют 20% в год от ее стоимости ($2,5).

Чтобы сэкономить на этих затратах, директор решил запускать линию на производство деталей (А) один раз в месяц на одну неделю. При этом линия производит по 500 деталей за каждый запуск (ровно столько, сколько надо). Оптимальна ли эта стратегия? Каким должен быть размер партии деталей, выпускаемых линией, и с какой частотой надо организовывать циклы производства этих деталей, чтобы минимизировать эти издержки?

Мастер завода, чувствуя, что дорогостоящих переналадок линии очень много, вносит предложение, позволяющее уменьшить стоимость каждой переналадки на 250 долл. Но для этого требуется приобрести дополнительное оборудование на сумму 6000 долл. При 12 переналадках в год стоимость оборудования окупится за 2 года. Прав ли мастер?

Анализ примера об универсальной производственной линии

Все необходимые расчеты в примере сделаны в MS-Excel.

Таблица 5.1. Оптимальный размер партии продукции задачи №5.3

№	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Оптимальный размер партии продукции							
2	C	H	S	D	P	d		
3	2,50	0,20	750	6000	2000	500		
4								
5	q*1	=Корень(2*D3*C3/(B3*A3)*E3/(E3-F3))						
6	TH	=$A$3*$B$3*B5/2*($E$3-$F$3)/$E$3						
7	TS	=$D$3/B5*$C$3						
8	T	=B7+B6						
9								
10	При S=$1000 и q*1				При S=$750 и q*1			
11	q*1	5656,85			q*1	4898,98		
12	TH	1060,66			TH	918,559		
13	TS	1060,66			TS	918,559		ΔT
14	T	2121,32			T	1837,118		284,2
15								
16	При S=$1000 и q=6000				При S=$750 и q=6000			
17	Q	6000			Q	6000		
18	TH	1125			TH	1125		
19	TS	1000			TS	750		
20	T	2125			T	1875		250
21								
23	При S=$1000 и q=500				При S=$750 и q=500			
24	Q	500			Q	500		
25	TH	93,75			TH	93,75		
26	TS	12000			TS	9000		
27	T	12093,8			T	9093,75		3000

Из таблицы №5.1 видно, что при затратах на переналадку $1000, оптимальной партией является $q_1^*\approx5657$. Если округлить это число до 6000, получается, что запускать линию надо 1 раз в год. При этом полные издержки превысят минимальные всего на $4, это меньше 0,4%. Если следовать требованиям директора и запускать линию 12 раз в год, то полные издержки окажутся почти в 6 раз больше минимальных издержек. Небольшие отклонения от оптимального размера q не приводят к существенным изменениям издержек. Но при неэффективной производственной политике, даже при уменьшении издержек на переналадку на $250 полные издержки очень велики (≈$9000). Большой выигрыш можно получить, перейдя к более разумному размеру партии q_1^*. В этом случае издержки составят ≈$1850, а выигрыш за год составит всего около $250. Тогда, чтобы окупить покупку оборудования понадобиться 24 года, поэтому лучше использовать оптимальный размер партии и запускать линию 1 раз в год.

2. Модель планирования дефицита

Допустим, речь идет о хранении очень дорогостоящей продукции. Если удельные издержки H очень велики, то, согласно формуле (5.4) q* будет очень мало. Тогда товар заказывать придется очень часто. Это может быть связано с проблемами охраны, сопровождения заказа, это увеличивает % порчи товара при транспортировке, что скажется на цене. В таких случаях бывает полезно ввести систему приема заказов на отсутствующий товар, которые выполняются сразу же после прихода очередного заказа на склад. Такая система управления заказами называется *планированием дефицита*.

Помимо издержек хранения и оформления в такой модели надо определить издержки C_x, связанные с введением системы заказов на отсутствующий товар. Например, кроме оплаты труда менеджеров, в эти издержки надо включить потери от уменьшения удовлетворенности покупателей, одни согласятся ждать товар, а другие уйдут к другому поставщику. Это делает оценку C_x сложной и неточной. Величина C_x – переменная, т.е. надо чтобы издержки C_x относились к единице отсутствующего товара или к одной принятой заявке. Например, оплату труда сотрудников надо поставить в прямую зависимость от числа принятых за этот период заявок.

Формулы для оптимального размера заказа и оптимальной величины дефицита.

Параметры модели: D-годовой спрос; H -удельные издержки хранения ед. запаса в течение года; S - издержки оформления одного заказа (независимо от его размера); C_x – издержки, связанные с ед. отсутствующего товара (по доброй воле клиента).

Переменные решения задачи: q – размер заказа; x – размер планируемого дефицита (количество единиц товара, на которое надо принимать заявки между последовательными прибытиями на склад партии продукции).

Очевидно, полные издержки за год содержат три компоненты: T_H – издержки хранения; T_S – издержки оформления заказа; T_x – издержки дефицита. Причем T_S такое же, как и в предыдущих моделях, а для определения T_H и T_x надо найти средний уровень запасов и дефицита в течение года.

Пусть q - размер закупаемой партии товара. Так как к моменту прихода этой партии на склад фирма имеет уже “x” заявок на отсутствующий товар и соответственно “x” единиц товара сразу же уходит со склада на удовлетворение этих заявок. Максимальный уровень запаса на складе составляет (q-x) единиц. Через некоторое время t_1 уровень запаса падает до 0 (рис. 5.4) и в течение времени t_2 работает система приема заказов на дефицит, при уровне запаса 0. Соответственно издержки хранения нулевые. Но в это время фирма несет издержки, связанные с поддержанием системы заказов (дефицита). Полное время между двумя последовательными поступлениями товара на склад равно $t=t_1+t_2$. Из рисунка 6. очевидно, что средний уровень запаса в течение t_1 равен $\frac{q-x}{2}$, а в течение времени t_2 равен 0. Тогда средний уровень запаса за весь цикл t будет равен

$$q_m = \frac{q-x}{2}\cdot\frac{t_1}{t} + 0\cdot\frac{t_2}{t} = \frac{(q-x)\cdot t_1}{2t}; \tag{5.8}$$

Средний уровень дефицита за время t: $X_m = 0 \cdot \frac{t_1}{t} + \frac{x}{2} \cdot \frac{t_2}{t} = \frac{x \cdot t_2}{2t}$. (5.9)

Из рис.5.4 видно, что $\frac{t_1}{t} = \frac{q-x}{q}; \frac{t_2}{t} = \frac{x}{q}$,

тогда полные складские издержки за год будут равны:

$$T(q,x) = TH + TX + TS = \frac{(q-x)^2}{2q} \cdot H + \frac{x^2}{2q} \cdot C_x + \frac{D}{q} \cdot S. \quad (5.10)$$

Чтобы получить оптимальные значения q и x, решаем задачу на экстремум функции двух переменных: $T'_q = 0, T'_x = 0$. Получим

$$q_2^* = q_{опт} = \sqrt{\frac{2DS}{H} \cdot \frac{H + C_x}{C_x}}; \qquad X_{опт} = \frac{H}{H + C_x} \cdot q_{опт}. \quad (5.11)$$

При этом: а) если C_x много больше чем H, то $\frac{H + C_x}{C_x} \approx 1$, а значит $q_{опт} = q^*$.

В этом случае $\frac{H}{C_x + H} \approx 0$, соответственно планируемый дефицит X=0.

Вывод: Если издержки по поддержанию системы планируемого дефицита много больше, чем издержки хранения, то оптимальным является экономический размер заказа и дефицит не следует планировать.

б) Если издержки хранения H много больше, чем C_x, то $X_{опт} \approx q_{опт}$, т.к. $\frac{H}{H + C_x} \approx 1$, т.е. система заказов вытеснит содержание запаса.

Вывод: Если издержки дефицита много меньше, чем издержки хранения запасов, выгодно перейти на прием предварительных заявок, почти полностью исключив обычный запас.

Решим пример на расчёт дефицита с использованием выведенных формул.

Задача №5.4. Некоторая компания в среднем реализует (годовой спрос) D=500 ед. товара, стоимость заказов S=40руб./за 1 заказ. Издержки хранения товара H=5руб./год за ед. товара. Годовая стоимость отсутствия запаса, т.е. издержки дефицита C_X=100руб./ед. товара.

Решение. Переменные задачи: q – размер заказа; X – размер планируемого дефицита. Сравним решение классической задачи с этим условием с решением задачи с дефицитом. 1) Основная модель. $q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 500}{5}} \approx 89(ед.товара)$.

$$T^* = \frac{S \cdot D}{q} + \frac{H \cdot q}{2} = \frac{40 \cdot 500}{89} + \frac{5 \cdot 89}{2} \approx 447(руб./год).$$

2) Модель с дефицитом. $q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H} \cdot \frac{H + C_X}{C_X}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 500}{5} \cdot \frac{5+100}{100}} \approx 87(ед)$.

$$X^* = \frac{5}{5+100} \cdot \frac{q^*}{2} = \frac{87}{21} \approx 4ед. \quad T^* = \frac{(q^* - x^*)^2}{2q^*} \cdot H + \frac{x^2}{2q} \cdot C_X + \frac{D}{q^*} \cdot S =$$

$$= \frac{(87-4)^2}{2 \cdot 87} \cdot 5 + \frac{16}{2 \cdot 87} \cdot 100 + \frac{500}{87} \cdot 40 \approx 198 + 9{,}2 + 230 \approx 437 руб./год.$$

Решим ещё одну задачу на модель с дефицитом с помощью MS-Excel.

Мини-кейс «Компания по продаже автомобилей»

<u>*Задача №5.5*</u>. Некоторая компания продает автомашины стоимостью $10000 каждая. Удельные издержки хранения H=30% от стоимости автомашины в год. Оформление и сопровождение заказа стоят $1000 (транспортные расходы включены в стоимость машины). Годовой спрос – 100 автомашин. Компания рассматривает возможность частичного перехода на систему заказов автомашин и желает оценить, как изменятся издержки хранения запаса машин на стоянке. Так оценить издержки дефицита заранее сложно, рассматриваются три возможных сценария развития событий.

Для поддержки системы заказов и дополнительную рекламу необходимы:

а) 1000 долл./ед. дефицита (т.е. на каждую запрашиваемую клиентом машину, которой нет в наличии);

б) 10000 долл./ед. дефицита в год;

в) бесконечно большие издержки (т.е. никакая реклама не поможет, машины просто перестанут покупать.

Каковы оптимальный размер заказа, оптимальный размер планируемого дефицита и полные складские издержки в расчете на год?

Решение и анализ задачи №5.5. 1. Рассчитаем размер оптимального заказа, используя MS-Excel (табл.5.2).

Таблица 5.2. Модель с планируемым дефицитом

	A	B	C	D	E
1	Модель с планируемым дефицитом				
3	D	S	h%	C	H
4	100	1000	30%	10000	=D4*C4
5					
6	q*	=Корень(2*$A$4*$B$4/$E$4)			
7	T*	=B6*$E$4/2+$A$4/B6*$B$4			
8					
9	C_x	1.00E+30	10000	3000	1000
10	$q_{опт}$	=Корень(2*$A$4*$B$4/($E$4)*($E$4+B9)/B9			
11	$X_{опт}$	=B10*$E$4/($E$4+B9)			
12	TH	=$E$4*(B10-B11)^2/(2*B10)			
13	TX	=B11^2*B9/(2*B10)			
14	TS	=$A$4/B10*$B$4			
15	T	=Сумм(B12:B14)			
16	Число заказов в год		=$A$4/B10		
17					
19	q*	8.16497			
20	T*	24494.9			
21					
22	C_x	1E+30	10000	3000	1000
23	$q_{опт}$	8.16	9.31	11.55	16.3299
24	$X_{опт}$	0.00	2.15	5.77	12.2474
25	TH	12247.45	8262.86	4330.13	1530.93
26	TX	0.00	2478.86	4330.13	4592.79
27	TS	12247.4	10741.7	8660.25	6123.72
28	T	24494.9	21483.4	17320.5	12247.4
29	Число зак. в год12.2474		10.7417	8.66025	6.12372

Из табл.5.2 видно, что в случае а) заказ составляет всего 8 машин, делать его надо больше 12 раз в год и суммарные издержки ≈24500 долл.

В случае в), когда издержки C_x бесконечно велики, то модель рекомендует отказаться от дефицита (x=0), размер заказа q*≈8, издержки те же. Т.е., в случае, когда стоимость единицы дефицита в год намного выше, чем удельные издержки хранения, модель планирования дефицита приводит к тем же результатам, что и модель экономического размера заказа.

В случае б), если C_x=10000 долл., планирование небольшого дефицита (≈2) машины выгодно. При равенстве C_x=H, одна половина получаемого заказа (≈11) машин идет на удовлетворение дефицита (≈5-6) машин, а другая (5 шт.) – в запас. При этом полные издержки в 1,5 раз меньше (17320,5).

Если C_x=1000 долл., модель рекомендует 75% заказа использовать на дефицит (≈12) и только 4 машины отправлять в запас. При этом издержки в 2 раза меньше (12247,4).

Вывод: Чем ниже издержки на дефицит, т.е. выше планируемый дефицит, тем больше размер заказа и тем реже надо заказывать данный товар. Но это означает, что клиенты должны дольше ждать выполнения заявки, что увеличивает их неудовлетворенность и соответственно затраты на поддержание системы планируемого дефицита C_x.

Все эти выводы подтверждают трудность оценки издержек дефицита, это затрудняет использование модели планируемого дефицита на практике.

Рассматривая предыдущие задачи управления запасами, мы считали, что товар был однотипным. В реальной жизни фирмы работают с товаром многономенклатурным. Рассмотрим такую задачу.

3. Оптимальный размер заказа для группы товаров

Если на складе торговой компании хранятся тысячи наименований товаров, делать заказ для каждой единице товара невозможно. Под “заказом” в такой компании понимают выбор ассортимента товаров и количества единиц каждого артикула для достаточно большой группы товаров от одного и того же поставщика. При этом затраты S на составление, оформление, размещение и доставку такого заказа, можно только условно распределить между отдельными артикулами.

Рассмотрим задачу работы фирмы с многономенклатурным товаром.

Мини-кейс «Одновременный заказ группы товаров»

Задача №5.6. Фирма заказывает у одного и того же поставщика K=10 наименований товаров. Закупочные цены (C) и оценки годового спроса (D) на каждое наименование даны в табл. 3. Стоимость оформления, размещения и доставки каждого заказа стоят $60. Издержки хранения для каждого наименования фирма оценивает в 10% в год от закупочной цены единицы товара.

Вопросы: а) Сколько раз в год надо делать заказ для этой группы товаров?

б) Каковы будут при этом полные складские издержки фирмы?

в) Если распределить затраты S на оформление и размещение заказа равномерно между всеми артикулами так, что S_i=$6 для каждого, каковы будут оптимальные размеры и частота заказа для каждого артикула товара?

г) Как сильно будут различаться издержки в случае независимого заказа каждого товара из группы и в случае заказа для всей группы?

д) Насколько реалистично предположение о затратах на независимый заказ каждого из артикулов?

Таблица 5.3. Закупочные цены, оценки годового спроса

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	1500	500	50	45	10	12	20	10	5	20
D	300	500	3000	1500	6000	4000	1000	1750	2500	600

Анализ задачи о группе товаров. Эту задачу можно легко решить аналитически, но чтобы сделать анализ, решим её численно с помощью MS-Excel и надстройки "Поиск решения". Сначала найдём размеры "экономичных размеров заказов" для каждого наименования в предположении, что издержки заказа каждого артикула S_i=$6. Все вычисления в табл. 5.4.

Аналитическое решение: Пусть число заказов для группы товаров – n, количество единиц каждого наименования D_i/n.

Формулы для расчёта издержек: $T_H = \sum_{i=1}^{n} \frac{D_i C_i h_i}{2n}$; $T_S = n \cdot S$; $T = T_H + T_S$.

Оптимальное число заказов: $n^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} D_i C_i h_i}{2S}}$; $q_i^* = \frac{D_i}{n^*}$; $n = \frac{T_S}{S}$.

Таблица 5.4. Оптимальный размер заказа для группы товаров

	A	B	C	D	E	F	G	H	K
1	Оптимальный размер заказа для группы товаров								
3	h=	10%							
4	S=	6							
6		C	D	H	q^*	TH	TS	T	D/ q^*
7	1	1500	300	=B7*	=Корень	=D7*E7/2	=C7/E7*$B$4	=F7+G7	=C7/E7
8				$B$3	(2*C7*				
9					$B$4/D7)				
10									Число
11									заказов в
12									год
14	**#**	**C**	**D**	**H**	**q^***	**TH**	**TS**	**T**	**n=D/q^***
15	1	1500	300	150	5	367.42	367.4	735	61
16	2	500	500	50	11	273.86	273.9	548	46
17	3	50	3000	5	85	212.13	212.1	424	35
18	4	45	1500	4.5	63	142.30	142.3	285	24
19	5	10	6000	1	268	134.16	134.2	268	22
20	6	12	4000	1.2	200	120	120	240	20
21	7	20	1000	2	77	77.4596	77.46	155	13
22	8	10	1750	1	145	72.4569	72.46	145	12
23	9	5	2500	0.5	245	61.2372	61.24	122	10
24	10	20	600	2	60	60	60	120	10
25					Полные издержки			**3042**	
27					Общее число заказов n			**30,10**	
28	Общий заказ								
29	**#**	**C**	**D**	**H**	**q**	**TH**	**TS**	**T**	
30	1	1500	300	150	9.97	747.41	180.6	928	
31	2	500	500	50	16.6	415.23	180.6	596	
32	3	50	3000	5	99.7	249.14	180.6	430	
33	4	45	1500	4.5	49.8	212.11	180.6	293	

34	5	10	6000	1	199	99.655	180.6	280	
35	6	12	4000	1.2	133	79.724	180.6	260	
36	7	20	1000	2	33.2	33/218	180.6	214	
37	8	10	1750	1	58.1	29.066	180.6	210	
38	9	5	2500	0.5	83	20.761	180.6	201	
39	10	20	600	2	19.9	19.931	180.6	201	
40					Полные издержки			**3612**	

В табл. 5.4 произведён расчёт по формуле для экономичного размера заказа для каждого товара из группы и издержки просуммированы. Они составили \$3042 а частота заказов варьируется от 61 раза для товара №1 до 10 – для товара №10. Номера товаров упорядочены по стоимости годовых запасов.

а**)** Если товары всех групп заказываются одновременно, то надо задать в год n≈30 заказов и вычислять величину каждого заказа в ячейках E30:E39, используя формулу $q=D_i/n$. б) Годовые издержки хранения для каждого наименования вычисляются так же, как раньше, а годовые издержки оформления заказа равны $n \cdot S$. Суммарные годовые издержки будут \$3612.

в**)** Из табл.5.4 видно, что размеры заказов и частоты, в случае независимых заказов и в случае общего заказа, очень сильно отличаются, но издержки отличаются только на 20%.

г**)** При этом надо понимать, что “размазывание” издержек заказа S по отдельным артикулам просто не реально. Допустим, для доставки товаров от поставщика компания использует грузовик, стоимость аренды которого не зависит от количества перевозимого груза. Если стоимость доставки груза составляет основную часть издержек S=\$60, то при вычислении экономичного размера заказа для каждого наименования лучше использовать S_i=\$60, чем S_i=\$6, т.к. годовые издержки будут намного выше (\$9620), чем в случае оптимального заказа для группы.

5.4. Неопределённость в модели управления запасами

В реальной жизни часто возникают ситуации, когда спрос никак нельзя считать постоянным в течение какого-либо периода. Особенно, если компания работает в режиме выполнения заказов внешних клиентов, которые определяют объём и срок очередной поставки данного товара. Чтобы основную модель приспособить к практике, обычно отказываются от одного из условий, или фиксированного времени, или фиксированного заказа. Рассмотрим эти варианты.

Фиксированный заказ в случайное время. Как только на складе запасы понизятся до некоторого уровня, подаётся заказ на фиксированное количество единиц товара. Такую систему называют *уровневой системой повторного заказа*. В этом случае вводят резервный запас, тогда издержки T будут складываться из издержек подачи заказа, издержек хранения основного запаса, резервного запаса и штрафа за дефицит. Зависимость объёма подаваемого заказа от времени показана на рис.5.7.

Уровневая система повторного заказа. Достижение минимальной стоимости

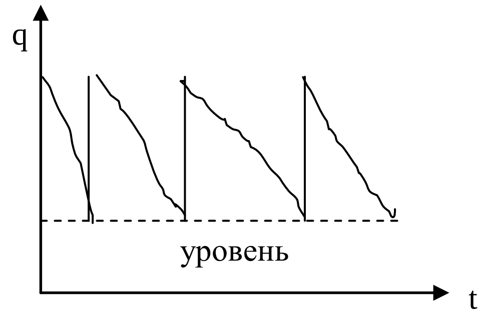


Рис.5.7.

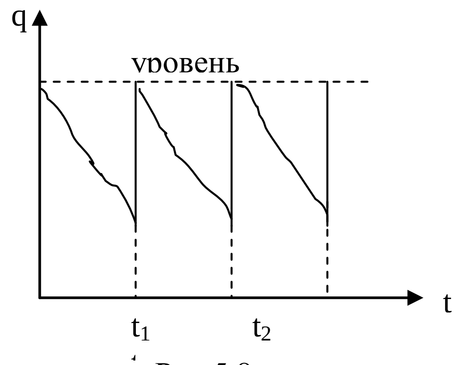


Рис.5.8.

Чтобы учесть непостоянность спроса, вводят резервный запас. Полные издержки в этом случае будут включать: подачу заказов (TC); хранение основного запаса (TH); хранение резервного запаса (TP); штраф за дефицит (TD).

$$T = TC + TH + TP + TD \qquad (5.12)$$

Сначала считаем, что спрос постоянный. При помощи основной модели находим оптимальный размер заказа q*. Именно такое количество будем заказывать каждый раз, Когда заказывать? Оптимальный размер заказа q* позволяет вычислить TC и TH. Как выбрать резервный запас? Чем он больше (меньше), тем меньше (больше) штраф за дефицит и чем больше (меньше) стоимость хранения резервного запаса. Методом проб и ошибок можно подобрать резервный запас, минимизирующий два последних слагаемых в формуле (5.12).

<u>Задача №5.7.</u> Пусть средний годовой спрос D=150 единиц товара за 300 рабочих дней. Стоимость подачи заказа C_0=50руб/зак. Издержки хранения H=12руб./год за единицу товара, годовая стоимость отсутствия запасов (штраф за дефицит) C_D=20руб./за ед. Время поставки 4 дня. Известна статистика (табл.5.5).

Таблица 5.5. Спрос товара в течение поставки

Спрос	0	1	2	3	4	5	6	Σ
Частота	2	8	13	10	7	5	5	50

За время поставки спрос 6ед. наблюдался 5раз, 5ед. – 5раз, 4ед. – 7раз, 3ед. – 10раз. 2ед. – 13раз, 1ед. – 8раз и 0ед. – 2раза. По данным задачи определяем оптимальный заказ $q^* = \sqrt{\dfrac{2C_0 \cdot D}{C_H}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 50 \cdot 150}{12}} = 35(ед.)$. Возникает вопрос: когда заказывать.

Находим издержки T: $$T = T_C + T_H + T_P + T_D = \frac{C_0 D}{q} + \frac{C_H q}{2} + C_P + C_D, \qquad (5.13)$$

где C_P – издержки хранения резервного запаса, C_D – издержки дефицита (математическое ожидание числа единиц, составляющих годовую нехватку запасов). $T = \dfrac{50 \cdot 150}{35} + \dfrac{12 \cdot 35}{2} + 12 \cdot x + 20 \cdot y$.

Надо подобрать переменную X, чтобы минимизировать сумму 12x+20y. Число циклов за год равно $\dfrac{D}{q} = \dfrac{150}{35} \approx 4{,}3$, средний спрос за день 150/300=0,5, время поставки 4 дня, т.е. средний спрос в течение поставки 4·0,5=2(ед.).

Находим вероятности (относительную частоту) для каждого значения спроса за время поставки. $p^* = \frac{n_i}{n}$, n=50 (табл. 5.6).

Таблица 5.6. Вероятности значений спроса

Спрос на товар (шт.)	0	1	2	3	4	5	6	Σ
Вероятности	0	0,16	0,26	0,20	0,14	0,10	0,10	1

С помощью основной модели мы учитываем спрос (0, 1, 2), идеальные за время поставки (т.к. средний спрос =2). Чтобы учесть спрос (3, 4, 5, 6) находим резервный запас: 1, 2, 3, 4. Начнём с наибольшего запаса – 4.

Вычисляем сумму двух последних слагаемых (табл.7), потом будем понижать на единицу средний резерв запаса и пересчитывать издержки.

Таблица 5.7. Расчет последних двух слагаемых в формуле (5.13)

Резервный запас X	Покрыт. спрос	Мат.ожидание (M[X])числа нехватки запасов в течение		Стоимость (руб./год)		
		одного цикла	года Y	Резерв= =12·резерв	Нехватка запасов= =20·M[X]	Общая стоимость
4	6	0	0	12·4=48	0	48+0=48
3	5	1·0,1=0,1	4,3·0,1=0,43	12·3=36	20·0,43=8,6	36+8,6=44,6
2	4	2·0,1+1·0,1=0,3	4,3·0,3=1,29	12·2=24	20·1,29=25,8	25,8+24=49,8
№1	**№2**	**№3**	**№4**	**№5**	**№6**	**№7**

Столбец№2. Покрытый спрос равен резервному запасу + средний спрос.

Столбец №3. Если покрытый спрос равен 6, нехватки запасов не возникает, т.е. M[X]=0. Если покрытый спрос равен 5, нехватка запасов 1ед. Математическое ожидание для одного цикла будет: 1·0,1=0,1. Если покрытый спрос равен 4, то возникает нехватка запасов 2 ед. при спросе 6 и 1 ед. при спросе 5, т.е. M[X]=2·0,1+1·0,1=0,3.

Столбец №4. Рассчитываем математическое ожидание за год. В течение года было 4,3 цикла, поэтому получим числа 0, 0,43 и 1,29.

Столбец №5. Рассчитана стоимость резервного запаса из расчёта: количество ед. запаса × 12руб./год (стоимость ед. запаса).

Столбец №6. Рассчитаны издержки дефицита, для чего нехватка запасов (Y) умножается на ставку 20руб./ед.

Столбец №7. Рассчитаны общие издержки. Заметим, что сначала сумма издержек убывает, затем возрастает. Целесообразно иметь резервный запас, равный 3 (покрытый спрос -5) и нет необходимости исследовать резервный запас 1. Тогда полные издержки будут: $T = 424{,}29 + 12 \cdot 3 + 20 \cdot 0{,}43 = 468{,}89 (руб / год)$. Таким образом, каждый раз, когда на складе остаются 5 ед. товара, надо заказывать 35ед.

Случайный заказ в фиксированное время. В этом случае заказ делают в заранее определённый момент времени, который выбирают с определённой периодичностью, поэтому модель носит название *циклическая система повторного заказа*. Заказы делаются в объёмах, равных разности между заранее установленным (необходимым) объёмом и количеством единиц товара на складе к этому моменту времени (рис.5.8).

Мини-кейс “Управление запасами при переменном спросе”

Задача №5.8. Менеджер производственного отдела получил заказ на поставку изделия П-1 на 8 недель вперёд (табл.5.8).

Таблица 5.8. Требования на поставку детали

Неделя	1	2	3	4	5	6	7	8
Заказ	50	60	70	60	95	75	60	55

Изделие производится с помощью универсальной линии, способной выпускать и другие изделия. Для изготовления 100 штук изделия П-1 требуется один день. Т.е. можно весь необходимый на 8 недель запас (525 изделий) произвести за один запуск на начальной (нулевой) неделе. При этом запас будет храниться на складе 8 недель, постепенно уменьшаясь. Можно производить каждую неделю ровно столько, сколько нужно клиенту. Тогда склад будет пустовать, а количество запусков будет равно количеству недель. Возможны и другие варианты, и менеджеру надо выбрать тот, который соответствует минимальным полным издержкам, в предположении, что склад будет пустым в конце 8 неделе.

Себестоимость изделия, затраты на переналадку линии для запуска партии продукции П-1 и издержки хранения единицы изделия на складе в течение недели приведены в табл. 5.9.

Таблица 5.9. Начальные данные задачи №5.8

Стоимость единицы продукции - C	10 долл.
Затраты на запуск производств. линии - S	47 долл.
Издержки хранения ед. запаса/ в неделю - h%	0,5%

Сколько продукции и в какие моменты следует производить, чтобы суммарные издержки на планируемые 8 недель были минимальными?

Решим задачу с помощью MS-Excel. 1) Подготовим данные для анализа и построим таблицу для расчёта издержек (табл.5.10).

Таблица 5.10. Расчёт издержек

Управление запасами при переменном спросе						
Стоимость единицы	10					
Издержки запуска	47	Средний годов.спрос		3412,5		
Издержки хранения	0,5%	издержки хранения ед.в год		2,6		
Неделя	Требуется	Надо произвести	Остаток на склад.	Издержки хранения	Издержки запуска	Полные издерж.
0						
1	50	50	0	0	47	47
2	60	60	0	0	47	94
3	70	70	0	0	47	141
4	60	60	0	0	47	188
5	95	95	0	0	47	235
6	75	75	0	0	47	282
7	60	60	0	0	47	329
8	55	55	0	0	47	**376**
Итого	525			EOQ=	351,2478	

Формулы табл. 5.10. В ячейке D3: Средний годовой спрос =B16*52/8;
D4: Издержки хранения ед. запаса в год =B2*4*52; B16: Всего заявок =Сумм(B8:B15);
D8: Остаток на складе =D7+C8-B8; E8: Издержки хранения =$B$4*$B$2*D8;
F7: Издержки запуска =Если(C8>0;$B$3;0); G8: Полные издержки =G7+E8+F8;
E16: EOQ =Корень(2*D3*B3/D4).

В колонку **"Нужно произвести**" вначале ничего не пишем.

2) Теперь попробуем простую методику **"Размер партии равен заказу**". В колонку **"Нужно произвести**" введём значения, равные значениям в колонке **"Требуется".** Значения суммарных издержек и остатка на складе можно прочесть в конце планируемого периода в нижней строке таблицы 5.10. Суммарные издержки равны 376 у.е.

3) Теперь пробуем произвести **"Всё сразу**". Для этого введём в первую ячейку колонки **"Нужно произвести**" суммарный заказ на 8 недель – 525 ед. изделия П-1. В этом случае суммарные издержки меньше и равны только 141 у.е. (табл.5.11).

Таблица 5.11. Стратегия 2: Всё сразу

Управление запасами при переменном спросе						
Стоим. ед.	10					
Издержки зап.	47	Средн.годов.спрос		3412,5		
Издержки хран.	0,50%	изд. хран.ед.в год		2,6		
Неделя	Требуется	Надо пр.	Запас ск.	Изд. Хран.	Изд. Зап.	Полн. Из.
0						
1	50	525	475	23,75	47	70,75
2	60		415	20,75	0	91,5
3	70		345	17,25	0	108,75
4	60		285	14,25	0	123
5	95		190	9,5	0	132,5
6	75		115	5,75	0	138,25
7	60		55	2,75	0	141
8	55		0	0	0	**141**

4) Рассмотрим методику, включающую экономический размер заказа EOQ.

В первую ячейку колонки **"Нужно произвести**" введём рассчитанное значение EOQ. В колонке **"Запас на складе**" найдите строчку с первым отрицательным значением и введите в колонке **"Нужно произвести**" на этой строчке значение EOQ. В конце планируемого периода прочтите значения суммарных издержек и остатки на складе (табл.5.12).

Таблица 5.12. Стратегия 3 с учётом EOQ

Неделя	Требуется	Надо произвес.	Запас на складе	Издержки хранения	Издержки запуска	Полные издержки
0						
1	50	351	301	15,05	47	62,05
2	60		241	12,05	0	74,1
3	70		171	8,55	0	82,65
4	60		111	5,55	0	88,2
5	95		**16**	0,8	0	89
6	75	351	292	14,6	47	150,6
7	60		232	11,6	0	162,2

8	55		177	8,85	0	171,05

На самом деле, произвести нужно не EOQ, а такое количество изделий, которого не хватает для выполнения всех оставшихся заказов (чтобы остаток на складе в конце 8-недельного периода равнялся нулю). Кроме того, на неделе, перед запуском новой партии (5-я неделя), остаток на складе составил 16 ед. Чтобы им не лежать на складе целую неделю, партию, произведённую на первой неделе, можно уменьшить на 16 ед. (335 ед.). Это снизит издержки хранения. Тогда вторую партию нужно увеличить на 16 единиц (190 ед.). В этом случае суммарные издержки будут меньше и равны 140,5 у.е. (табл.5.13).

Таблица 5.13. Стратегия 4, с учётом остатка

Неделя	Требуется	Надо пр.	Запас ск.	Изд. Хран.	Изд. Зап.	Полн. Из.
0						
1	50	335	285	14,25	47	61,25
2	60		225	11,25	0	72,5
3	70		155	7,75	0	80,25
4	60		95	4,75	0	85
5	95		0	0	0	85
6	75	190	115	5,75	47	137,75
7	60		55	2,75	0	140,5
8	55		0	0	0	140,5

5) *<u>Оптимальная стратегия</u>*. Так как размеры двух партий продукции резко различаются (335 и 190), издержки хранения в первой половине гораздо больше, чем во второй. Обычно стремятся к более или менее равным значениям для обеих партий, т.е. к примерно равным средним уровням остатков на складе.

Поэтому разобьём общий объём заказов на 8 недель на две примерно одинаковые партии, например, 265 и 260 – на 5-ой неделе (когда остаток на складе станет отрицательным). При этом на 4-ой неделе бесполезно пролежали 25 деталей. Уменьшим первую партию на 25 ед., а вторую соответственно увеличим (табл.5.14)

Таблица 5.14. Оптимальная стратегия

Неделя	Требуется	Нужно произвес.	Запас на склад	Издерж. хранен.	Издерж. запуска	Полные издерж.
0						
1	50	240	190	9,5	47	56,5
2	60		130	6,5	0	63
3	70		60	3	0	66
4	60		0	0	0	66
5	95	285	190	9,5	47	122,5
6	75		115	5,75	0	128,25
7	60		55	2,75	0	131
8	55		0	0	0	**131**

Суммарные издержки составят 131 у.е., это меньше чем в других вариантах.

Циклическая система повторного заказа

<u>Задача №5.9.</u> Завод производит турбины. Работает 18 час в сутки, 300 дней в году. Производительность установки по производству лопастей – 500шт./час, среднее их потребление на линии сборки турбин - 5000ед./день. Стоимость запуска установки - S=$3000. Рассчитать: 1) Издержки хранения и заказа лопастей; 2)

Можно ли снизить общую сумму издержек за счёт изменения плана производства? Сколько раз в год надо запускать установку в этом случае? 3) При среднем потреблении в 5000 ед./день этот спрос варьируется с отклонением 1000ед. (5000±1000). Если принять, что после подачи заявки лопасти начнут поступать через сутки, то при каком количестве лопастей на складе следует подать заявку?

Решение. Пусть y – запас лопастей на складе.

1) Издержки хранения и заказа будут: T=TH+TS.

$$TH = \frac{15\cdot 500\cdot 18\cdot 300}{20} + 3000\cdot 15 = 202{,}5\cdot 10^4 + 4{,}5\cdot 10^4 = 206{,}5\cdot 10^4\,(\textit{долл.})$$

$T_{хран} = \dfrac{(p-d)}{2p}\cdot q.$ Где p - темп производства, d –скорость использования лопастей: $p = 300\cdot 500\cdot 18\cdot 0{,}1 = 27\cdot 10^4\,(\textit{ед.})$. $d = 5000\cdot 300 = 15\cdot 10^4\,(\textit{ед.})$

$$q = 500\cdot 18\cdot 15 = 135\cdot 10^3\,(\textit{ед.}).\ T_{хран} = \frac{(27-15)\cdot 10^4}{2\cdot 27\cdot 10^4}\cdot 135\cdot 10^3\cdot 36{,}5 \approx 11\cdot 10^5\,(\textit{долл.})$$

Общая сумма издержек T=$TH + TS \approx 20{,}65\cdot 10^5 + 11\cdot 10^5 \approx 31{,}65\cdot 10^5\,(\textit{долл.})$

2) Все задачи мы рассматривали без ограничений на площади склада, считали, что он безграничный. На самом деле компании имеют определённые складские ёмкости.

5.5. Модель производства оптимальной партии продукции с учётом объёма склада

Пусть ёмкость склада V, количество товара, размещённого в единице объёма склада – U, запас товара на складе – y.

Если $\dfrac{y}{U} \le V$, то задача решена: $y = q\cdot\left(\dfrac{p-d}{p}\right)$. В противном случае появляется ограничение на ёмкость, т.е. будем иметь задачу условного экстремума:

Найти $$\min q(t) = \frac{S\cdot d}{q} + \frac{h\cdot q}{2}\cdot\frac{(p-d)}{p} \tag{5.14}$$

при ограничении $$\frac{y}{U} \le V \Rightarrow \frac{q}{U}\cdot\left(\frac{p-d}{p}\right) \le V \tag{5.15}$$

Решая эту задачу, получим $$q* = \frac{V\cdot U}{\left(1-\dfrac{d}{p}\right)} = \frac{V\cdot U\cdot p}{p-d} \tag{5.16}$$

Наряду с оптимальным запасом, определяют предельную (max) арендную плату за использование дополнительных складских ёмкостей – показатель λ(руб./кг. сут.) по формуле:

$$\lambda = \frac{S\cdot U}{(q*)^2}\cdot\frac{p\cdot d}{p-d} - \frac{h\cdot U}{2}. \tag{5.17}$$

Если фактическая арендная плата ά(руб./кг. сут.)≤λ(руб./кг. сут.), то аренда выгодна, тогда заказываемой партии товара вычисляется по формуле:

$$q* = \sqrt{\frac{2SD}{h}}\cdot\sqrt{\frac{p}{p-d}}. \tag{5.18}$$

Если $ά>λ$, то аренда дополнительной площади не выгодна и тогда объём заказа надо уменьшить, в этом случае он рассчитывается по формуле (5.16).

Рассмотрим модель производственной партии продукции (задача №5.2), добавив условие: ёмкость склада V (ограничена).

Задача №5.10. Сделать вывод о целесообразности аренды дополнительных складских ёмкостей или о необходимости сокращения объёма производимой продукции с учётом имеющихся складских ёмкостей, если фактическая арендная плата 0,039руб./кг. сут., а предельная арендная плата, рассчитанная по формуле (5.17) равна 0,035руб./кг. сут.

Вывод. Т.к. $ά>λ$, аренда дополнительных складских помещений не выгодна, значит, объём партии производимой продукции надо сократить до пределов, чтобы запас товаров можно было разместить на имеющихся площадях.

Мини – кейс "План закупок товара. Оптовая торговля овощами"

Задача №5.11. Компания "Холод" занимается поставкой десяти типов замороженных овощей в овощные и продовольственные магазины. Замороженные овощи приходят от поставщика в стандартных картонных коробках, которые занимают на складе объём по 0,375м^3. Недельный запас замороженных овощей прибывает на склад в понедельник утром. В конце недели, практически всегда, склад компании пустеет. Объём склада 5400м^3. Компания пользуется кредитной линией, допускающей еженедельный расход $30000 на покупку недельного запаса овощей (оплата единовременно в понедельник утром). Компания прогнозирует объём продаж на каждую неделю в терминах минимального и максимального количества коробок для каждого типа овощей. Минимальное количество определяется контрактами, которые компания заключает с овощными магазинами. Максимальное количество коробок - это пессимистический прогноз рыночного спроса на предстоящей неделе. Цены, по которым продукция закупается у поставщика и отпускается потребителям, приведены в табл. 5.15 вместе с минимальными и максимальными объёмами продаж каждого продукта.

Требуется определить объём закупок каждого типа овощей, максимизирующий прибыль компании.

Таблица 5.15. Данные по закупкам

№	Продукт	Закупочная цена	Отпускная цена	Минимум	Максимум
1	Кукуруза	2,15	2,27	300	1500
2	Картофель	2,2	2,48	400	2000
3	Бобы	2,4	2,7	250	900
4	Морковь	2,6	2,92	300	1200
5	Цветная капуста	2,85	3,13	100	300
6	Зелёный горошек	2,25	2,48	750	3500
7	Капуста	2,1	2,27	400	2000
8	Салат	3	3,18	100	500
9	Кабачки	2,5	2,7	100	500
10	Брокколи	2,9	3,13	400	2500

Математическая модель задачи. В задаче надо определить максимальную прибыль, которая равна разности отпускной цены и закупочной. Для того, чтобы её подсчитать, введём переменные $\{X_j\}$– количество коробок каждого вида продукта. Тогда кредит будет равен $\sum_{j=1}^{n} X_j$ (закупочная цена). Прибыль от каждой коробки продукта: $П_j = ц_j(отп) - ц_j(зак)$. Кредит на закупку каждого вида овощей обозначим K_j.

$$K_j = X_j \cdot Ц_j(зак). \ \sum кредита = \sum объёма \ \ закупок. \tag{5.19}$$

Целевая функция (прибыль) будет равна:

$$P = \sum_{j=1}^{n} П_j \cdot X_j = \sum_{j=1}^{n} K_j = \sum_{j=1}^{n} V_{кор} \cdot X_j \to \max, \ j = 1,...,10, \tag{5.20}$$

при ограничениях: $$X_{\min} \le X_j \le X_{\max}, \tag{5.21}$$

Пусть q_j объём заказа для каждого продукта, максимум которого приводит к перекрытию кредита. Оптимальный объём закупок и издержки считаем по формулам (5.4). Задачу решаем с помощью MS-Excel, (табл.5.16).

Таблица 5.16. Оптовая торговля овощами

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Максимальный кредит $30000								
2		Объём коробки 0,375м^3								
3		Объём склада 5400м^3								
5	Продукт	Закупочн. цена	Отпускн. цена	MIN	MAX	Прибыль $П_i$	Кол-во короб. X_i	Кредит =G6*	Объём =$F$3*	Рентабел. F6:F15/ B6:B15
6	Кукуруза	2,15	2,27	300	1500	0,12	X_1	*B6	*G6	0.0558
7	Картофель	2,2	2,48	400	2000	0,28	X_2			0.1273
8	Бобы	2,4	2,7	250	900	0,3	X_3			0.1250
9	Морковь	2,6	2,92	300	1200	0,32	X_4			0.1231
10	Цветн. кап	2,85	3,13	100	300	0,28	X_5			0.0982
11	Зелён. гор.	2,25	2,48	750	3500	0,23	X_6			0.1022
12	Капуста	2,0	2,13	400	2000	0,13	X_7			0.0650
13	Салат	2,1	2,27	100	500	0,18	X_8			0.0810
14	Кабачки	2,5	2,7	100	500	0,2	X_9			0.0800
15	Брокколи	3,	3,18	400	2500	0,23	X_{10}			0.0600
16			Цель=Суммпроизв(F6:F15;G6:G15)= Сумм(H6:H15)=Сумм(I6:I15)					Огран. ≤30000	Огран. ≤4500	

Необходимо внести также ограничение (5.21) на количество коробок (по строке). Программа работает так, что вначале берёт по максимуму продукт №1 и т.д., до тех пор, пока не выполнится ограничение на количество коробок.

Анализ примера. Можно ли увеличить прибыль компании, используя понятие “от узкого места”. *Принцип использования этого понятия: ищи узкое место и его расширяй!* Очевидно в нашей задаче “узкое место” – деньги.

Используя этот принцип для увеличения прибыли, 1) найдём величину рентабельности каждого вида овощей, в табл. 5.11 – это столбец J.

$$R_i = \frac{П_i}{Ц_i(зак)}. \tag{5.22}$$

2) Ранжируем продукты в столбце J по убыванию ранга (коэффициента рентабельности) (табл.5.17) и оформляем заново лист MS-Excel.

Таблица 5.17. Список продуктов в порядке ранга

№	Продукт	MIN	MAX	Кредит	Объём
1	Картофель	400	2000	4300	750
2	Бобы	250	900	2160	337,5
3	Морковь	300	1200	3120	450
4	Зелён.горошек	750	3500	7875	1312,5
5	Цветн. капуста	100	300	855	112,5
6	Салат	400	2000	4200	750
7	Кабачки	100	500	1250	187,5
8	Капуста	400	2500	5000	937,5
9	Брокколи	100	198	594	74.25
10	Кукуруза	300	300	645	112,5
	Сумма			**29999**	**5024,25**

3) Вводим для переменной X_j минимально допустимые значения (столбец D), а далее вводим сверху вниз максимальные значения X_j (столбец E), протягивая формулу на одну строку вниз, пока предел кредита не будет превзойдён.

4) Как только предел кредита будет превзойдён, рассчитываем значение заказа для того продукта, максимум которого привёл к перекрытию кредита. Для этого находим разность суммы кредита и суммарной прибыли, полученной до данного продукта, т.е. (30000-P). Этот остаток делят на прибыль, получаемую от одной коробки данного продукта, это и будет то количество коробок последнего продукта (заказ), которое надо закупить, чтобы не выйти за пределы кредита.

Результаты в табл.5.17. Прибыль компании от продажи овощей равна:

$$P = \sum_{j=1}^{10} П_д \cdot X_j = 2939{,}64 \text{долл.}$$

Мини-кейс “Выбор поставщика”

<u>Задача №5.12.</u> Машиностроительный завод покупает болты с гайками для сборочного участка, годовая потребность в которых составляет 50 тыс. штук в год. На данный момент имеется два предложения от разных поставщиков, условия которых приведены в табл. 5.18.

Стоимость хранения для завода можно оценить в 38% от стоимости единицы хранения в год. Стоимость оформления одного заказа – 1000 руб.

Спрос в течение года на данный товар равномерный.

а) Каков оптимальный размер заказа с учётом скидок каждого из поставщиков?

б) Какого поставщика следует предпочесть?

Таблица 5.18. Предложения поставщиков

Поставщик А		**Поставщик В**	
Количество, шт.	Цена за шт., руб.	Количество, шт.	Цена за шт., руб.
до 5000	5	до 9999	4,8
5000-19999	4,6	10000-29999	4,5
от 20000	4,4	от 30000	4,3

Решение. Т.к. спрос на товар по условию задачи известный и постоянный, можно использовать модель экономичного размера заказа EOQ. Издержки будут определяться издержками хранения и заказа в год. Наличие системы скидок на базовые цены может повлиять на размеры экономичного размера заказа, если они превысят рост издержек хранения. Решим задачу в MS-Excel.

Организуем данные, как показано в табл. 5.19.

Таблица 5.19. Данные задачи №5.11.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Выбор поставщика						
2	h	S	D				
3	38%	1000	50000				
4			Поставщик А			Поставщик В	
5	Порог скидок Максим.	4999	19999	1000000	9999	29999	1000000
6	Миним.	1	5000	20000	1	10000	30000
7	цена	5	4,6	4,4	4.8	4,5	4,3
8	EOQ	=Корень(2*$C$3*$B$3/(B7*$A$3))					
9	Реальный Q	=ЕСЛИ(И(B8>=B6;B8>=B5);B8;ЕСЛИ(B8<=B6;B6;B5)					
10	TH	=B9/2*$A$3*B7					
11	TS	=$C$3/B9*$B$3					
12	T	=B11+B10					
13	T+TC	=B12+$C$3*B7					

В ячейках А3-С3 записаны общие данные: издержки хранения, издержки заказа, годовая потребность. В строках B5:G5 и B6:G6 записаны верхний и нижний границы диапазонов скидок. Большое число 1 млн. заменяет бесконечную границу диапазона.

Для расчёта экономического размера заказа используем стандартную формулу $EOQ = \sqrt{2DS/h}$. В задаче величина H непостоянна (зависит от цены товара, которая может быть разной). В расчётах $H = h \cdot C$. Формула для EOQ записана в ячейке B8. Протянув эту формулу вправо, можем рассчитать EOQ для других цен закупки. Получим результаты (табл.5.20).

Таблица 5.20. Расчёт EOQ для разных диапазонов скидок

Порог скидк., макс.	4999	19999	1000000	9999	29999	1000000
мин.	1	5000	20000	1	10000	30000
цена	5	4,6	4,4	4,8	4,5	4,3
EOQ	7254,76	7563,6	7733,6	7404,4	7647,2	7823,0

Чтобы выбрать размер партии, надо вспомнить график зависимости суммы издержек хранения от размера заказа. Это график с одним минимумом (рис.5.2). Это значит, чем ближе размер заказа к EOQ, тем меньше издержки, и наоборот. В тех случаях, когда нельзя выбрать размер заказа равный EOQ, можно взять реальную величину заказа, наиболее близкую к экономическому размеру заказа.

В случае с покупкой товара по цене 5 руб. это верхняя граница диапазона, т.е. 4999 шт. В таблицу 5.19 кроме строки для расчёта EOQ добавлена строка "Реальный Q" – реальный размер заказа. В неё записываем тот размер заказа, который выбираем на самом деле с учётом известных условий. Формула для выбора записана в ячейке B9. Её действие следующее: если размер EOQ больше или равен минимально возможной партии и меньше или равен максимально возможной партии, выбираем реальный размер заказа равный EOQ. Если это не так, т.е. если EOQ меньше минимальной партии, выбираем реальный размер заказа равным минимальной партии, а иначе (EOQ больше, чем максимальная партия) выбираем размер заказа равным максимально возможной партии.

В ячейках A10, A11, A12 записаны формулы для определения TH, TS и T. Полная величина издержек включает не только T, но и сумму, истраченную на покупку годового запаса товара (ячейка A13). Все введённые формулы протягиваем вправо на все 6 ячеек. В результате получим таблицу 5.21.

Таблица 5.21. Результаты решения задачи №5.12

	Поставщик А			Поставщик В		
Порог скидки, максим.	4999	19999	1000000	9999	29999	1000000
Миним.	1	5000	20000	1	10000	30000
Цена	5	4,6	4,4	4,8	**4,5**	4,3
EOQ	7254,8	7563,6	7733,6	7404,4	7647,2	7823,0
Реальный Q	4999	7564	20000	7404	**10000**	30000
TH	4749	6611	16720	6753	8550	24510
TS	10002	6611	2500	6753	5000	1667
T	14751	13221	19220	13506	13550	26177
T+TC	264751	243221	239220	253506	**238550**	241177

В последней строке табл. 5.21 выведены наименьшие возможные издержки при покупке болтов по каждой из 6 предложенных цен. Из этих 6 значений наименьшей оказывается 238550 руб., которая получается при покупке болтов у поставщика В партиями по 10 тыс. штук по цене 4,5 руб. За 1 шт.

Контрольные вопросы к разделу 5

1. Перечислите основные функции запасов.
2. Что называется издержками хранения? Почему это переменные издержки?
3. Перечислите возможные составляющие издержек хранения.
4. К каким издержкам относятся издержки по запуску новой партии продукции?
5. Из чего складываются издержки оформления заказа для фирмы оптовой торговли?
6. В какой вид издержек нужно включать фактические затраты на содержание склада? Влияют ли эти затраты на выбор оптимального размера заказа и почему?
7. Почему говорят лишь об оценке, а не о точном определении издержек хранения?
8. Если надо увеличить (уменьшить) размер заказа на 40% по сравнению с оптимальным, на сколько примерно изменятся полные складские издержки?

9. Объясните вид зависимости полных складских издержек от величины заказа. Почему всегда существует оптимальный размер заказа, минимизирующий издержки?

10. Каковы основные допущения модели экономического размера заказа?

11. Как выглядит формула для оптимального (экономичного) размера заказа?

12. Запишите формулу для производства оптимального размера партии продукции.

13. Объясните, в чём состоит отличие модели с планированием дефицита от модели экономичного размера заказа. Почему оптимальный размер заказа в этой модели всегда выше, чем EOQ в обычной?

14. Запишите формулу для оптимального размера заказа и оптимальной величины дефицита.

15. Объясните, каким образом учёт оптовых скидок может изменить оптимальный размер заказа по сравнению с определённым в модели EOQ?

16. По каким формулам можно рассчитать оптимальную частоту заказа для группы товаров и размер заказа каждого наименования?

Задачи для самостоятельного решения к разделу 5

5.1) Классическая задача “Экономичный размер партии деталей”

Темп производства деталей P=160ед./день, темп их использования D=30ед./день. Годовые издержки хранения C_h=10 руб/ед. Стоимость организации производственного цикла C_S=200 руб. Найти экономичный размер партии деталей, годовые издержки, число циклов за год, расстояние между циклами. Решить аналитически.

5.2) Классическая задача “Экономичный размер заказа”

Найти оптимальный размер заказа, издержки, уровень повторного заказа, число циклов за год, расстояние между циклами, если годовой спрос D=400 ед. товара, стоимость подачи заказа C_0=40 рублей/заказ. Издержки хранения одной единицы C_h=250 рублей/год, время доставки 6 дней, 1 год – 250 рабочих дней. Решить аналитически.

5.3) Выбор оптимальной системы скидок

Производственная фирма закупает электронную схему у внешнего поставщика. Отдел закупок рассматривает троих претендентов на поставку этой схемы. Первый поставщик предлагает следующую систему скидок: до 3000 шт. – 794 руб., от 3000 шт. до 5000 шт.– 780руб., свыше 5000 шт. – 770 руб. Второй более крупный поставщик предлагает более существенные скидки: до 10000 шт. – 800 руб., от 10000 шт. до 20000 шт. – 760 руб., свыше 20000 шт. – 720 руб. Третья, мелкая фирма не даёт существенных скидок и готова поставлять продукцию небольшими партиями: до 1500 шт. – 800 руб., от 1500 шт. до 2500 шт. – 790 руб., свыше 2500 шт. – 782 руб. Внутренняя норма доходности фирмы около 30% издержек, связанных с оформлением, доставкой и размещением заказа электронных схем, оценивается в 90000 руб. за заказ. Годовая потребность предприятия – 10000 схем. Площадь складов позволяет хранить запас, в несколько раз превышающей годовую потребность. У какого поставщика и какой величины надо сделать заказ, чтобы минимизировать полные складские издержки для этого запаса? Решить с помощью MS-Excel.

5.4) “Произвести товар у себя или закупить у поставщика”

Производственная компания имеет универсальную линию для производства 10 различных видов деталей. Мощность линии для производства деталей с артикулом Ф-4 составляет 8 тыс. деталей в год. Потребность в этой детали на сборочном конвейере – 3 тыс. деталей в год. Стоимость переналадки линии для выпуска этой детали составляет 50 долл., а издержки хранения детали на складе – 10% стоимости детали. Себестоимость детали Ф-4 равна 24 долл. Эту деталь можно закупить у другого производителя по цене 25 долл. При этом расходы на оформление, размещение и доставку заказа составляют S=40 долл. за заказ.

а) Какая из двух возможностей экономичнее?

б) Как изменится ответ, если S=35 долл., 20 долл.? Решить с помощью MS-Excel.

5.5) Оптимизация при переменном спросе

Производственная линия цеха может выпускать 20 различных наименований деталей. Заказ на производство некоторой детали Ф-3 на следующий год представлен в таблице. Всего за год надо произвести 1067 ед. продукции. Линия справится с этой задачей за 3 недели непрерывной работы. Однако при этом, большее количество деталей ляжет на склад, и пролежит там целый год, что приведёт к высоким издержкам хранения. Себестоимость единицы продукции 10 у.е. Издержки хранения оцениваются как 2% в месяц от себестоимости детали.

Если запускать линию на производство этой продукции каждый месяц, то часто придётся переналаживать линию на производство новой продукции, каждая переналадка стоит 50 у.е. Когда и какого размера партии этой детали производить, чтобы выполнить план отгрузки и минимизировать суммарные издержки управления запасами?

Таблица. Заказ на производство детали Ф-3

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Заказ	60	60	62	62	64	64	130	185	150	90	70	70

5.6) План поставок сырья на склад

Отдел снабжения завода получил от производственного отдела график потребления сырья (в тоннах) на ближайшие 12 месяцев (табл.1).

Таблица №1. График потребления сырья

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Заказ	60	60	62	62	64	64	130	185	150	90	70	70

Сырьё поставляется на завод в вагонах. В каждом вагоне можно привести не более 300 тонн сырья. Стоимость доставки одного вагона сырья – 50 у.е. Стоимость одной тонны сырья – 10 у.е. При оценке издержек хранения сырья на складе учитывается стоимость замороженного капитала в размере 2% от стоимости сырья в месяц. Составить план поставок сырья на склад завода, минимизирующие суммарные издержки хранения и доставки, при этом запас сырья на складе не должен опускаться ниже значения резервного запаса – 20 тонн.

Ответы к задачам
для самостоятельного решения

Часть 1. Оптимизация в условиях полной определённости. Метод линейной оптимизации

Задача 1.1. $X_1=0$; $X_2=100$; $X_3=200$; $X_4=0$; F=27900.

Задача 1.2. а) Оптимальный план закупок при отсутствии ограничений на количество закупленных костюмов в табл.1.

Таблица 1. Ответ а)

Тип костюмов	**Количество**
Полиэстер	500
Шерсть	2000
Хлопок	2000
Импорт	0

Прибыль равна 171500 долл.

б) Если закупить не менее 200 костюмов каждого вида, план изменится (табл.2), а прибыль упадёт до 170333 долл.

Таблица 2. Ответ б)

Тип костюмов	**Количество**
Полиэстер	733,33
Шерсть	1333,3
Хлопок	2133,3
Импорт	200

в) Если стоимость полиэстрового костюма увеличить (уменьшить) на 1 долл, оптимальное решение не изменится. Если изменить на 2 долл. – решение изменится

г) Каждый долл., дополнительно истраченный на рекламу, принесёт дополнительно 83 цента, т.е. увеличение бюджета рекламы на 400 долл., дополнительная прибыль составит только 332 долл.

д) Добавление ограничения: полное число закупаемых костюмов меньше 5000 шт., ничего не изменит.

Задача 1.3. Для получения максимальной прибыли 3365 млн. долл., нада финансировать проекты: произв.-1; произв.-2; розничная торговля-1 и реклама.

Часть 2. Транспортные задачи и логистика, задачи о назначении и отборе

Задача 2.1. а) P_{min} =251950 руб.; б) недопоставка только на участок А
(30 машин; в) P_{min} =262450 руб., вся недопоставка пришлась на участок С (30 машин); г) нет (повторный поиск к успеху не приведёт).

Задача 2.2. Рабочие S_4 и S_8 не включены в “бригаду”. Для времени выполнения фиктивной операции D_{fict} всем рабочим надо приписать одинаковое время. Оптимальный план не зависит от того, каково конкретное значение этого времени, но лучше, чтобы оно равнялось 0. $F_{опт.}$=157, при плане (табл.3)

Таблица 3. Оптимальный план

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{fict}
S_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
S_2	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
S_3	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
S_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
S_5	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
S_6	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
S_7	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
S_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
S_9	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_{10}	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_{11}	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
S_{12}	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0

Задача 2.3. $F_{оптим.}$=537 при плане (табл.4).

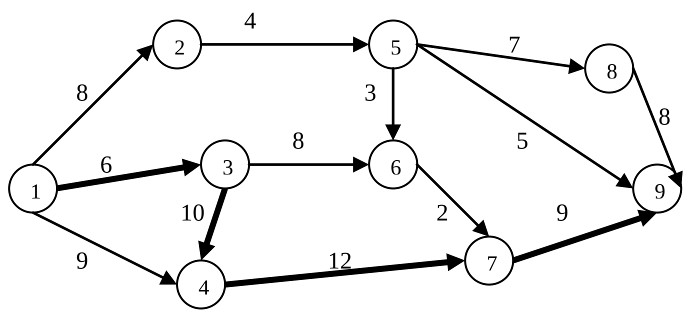
Таблица 3. Оптимальный план перевозок

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}
S_1	0	**6**	0	0	**11**	0	0	0	0	0
S_2	0	**5**	**8**	0	0	0	**8**	0	**2**	0
S_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**10**
S_4	**6**	0	**3**	0	0	**12**	0	**3**	0	0
S_5	0	0	0	**3**	**1**	0	0	0	0	**1**

Задача 2.4. Прибыль равна 14705 долл.

Часть 3. Сетевые модели, оптимизация на графах и сетях. Сетевое планирование и управление

Задача 3.1

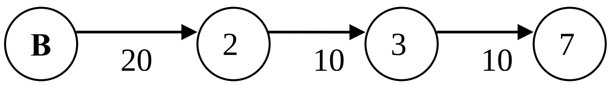


Критический путь 1, 3, 4, 7, 9. $T_{кр}$ =37суток. Работу (4;7) можно сократить на 4 суток, $\Delta S=1{,}6\cdot 4=6{,}4$, остаётся 8,5-6,4=2,1. Следующая работа, которую надо сократить - (7;9), можно только на 1 день, $\Delta S=1{,}7\cdot 1=1{,}7$. Остаток 2,1-1,7=0,4(усл. ден.ед.). Максимальное количество дней на которое можно сократить критический путь – 5 суток.

Задача 3.2.

L(4,2)=54; L(4,3)=66: (4)–(2)–(3); L(4,6)=50; L(4;5)=86: (4)-(2)-(3)-(5);

Задача 3.3.



L_{min}=40

Задача 3.4. Управляющий проектом не прав, надо выбрать вариант №3. Так как суммарные издержки по вариантам следующие: 1) 18 тыс.долл.; 2) 15 тыс.долл.; 3) 14 тыс.долл.

Задача 3.5. а) Критический путь – BDIQR. Продолжительность проекта – 56 дней; б) Минимальная продолжительность – 46 дней; в) Оптимальное сокращение 3 или 4 дня.

Часть 4. Теория игр. Элементы теории принятия решений

Задача 4.1. Платёжная матрица имеет вид: $W = \begin{pmatrix} 9750 & -250 \\ -12250 & 17750 \end{pmatrix}$.

Доход V=4250ден. ед. Оптимальная стратегия S^*=(225;175).

Задача 4.2. $S_A^* = \left(\frac{3}{5};\frac{2}{5}\right), H_A = \frac{10}{3}; \quad S_B^* = \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right), H_B = \frac{22}{5}.$

Задача 4.4: а) Стратегию А (EMV=44 тыс. долл.)

в) 72% и 28% для стабильной и изменяющейся ситуации соответственно.

с) С учётом найма агентства можно получить 48200 долл.

Задача 4.5. Не покупать. Ожидаемый EMV=53138 долл. с учётом дисконта.

Часть 5. Управление запасами

Задача 5.1. q=734ед.; C_h=5966; 14,9 цикла за год; расстояние между циклами 24,5 дня.

Задача 5.2. q=11ед., C_h=2830руб., 36 циклов за год, интервал между циклами 7 дней.

Задача 5.3. Следует покупать у 1 поставщика, по цене 780 руб. за 1 шт. при этом q=3000 шт. частота поставок 3.333 раза в год.

Задача 5.4. а) При заданных параметрах экономичный размер заказа у внешнего поставщика равен EOQ=392 при суммарных издержках 612,37 долл. в год; б) Если S=50 долл., EOQ=361 долл., T=830,66 долл. в год.

Если S=35 долл., EOQ=302 долл., T=694,98 долл. в год.

Если S=20 долл., EOQ=228 долл., T=525,36 долл. в год.

Т.е. выгоднее заказывать деталь у внешнего поставщика. Чтобы издержки при собственном изготовлении детали стали меньше, чем при закупке у внешнего поставщика, надо добиться уменьшения издержек запуска линии до величины ниже 27 долл. (Её можно определить подбором этого параметра в MS-Excel).

Литература

1. Акулич И.Л. Специальные задачи математического программирования. – Рига: Звайзгне, 1978 г.
2. Алексеев В.М., Голеев В.М. Сборник задач по оптимизации: теория, примеры, задачи. – М.: Наука, 1984 г.
3. Габасов Р., Кирилова Ф.М. Методы оптимизации. – Минск: изд-во БГУ, 1981 г.
4. Гараев Я.Г., Киселёв В.Г. Исследование операций: модели, системы, решения. – М.:ВЦ РАН, 2000 г.
5. Давыдов Э.Г. Игры, графы, ресурсы. – М.: Радио и связь, 1982 г.
6. Зайцев М.Г. Методы оптимизации управления для менеджеров: компъютерно - ориентированный подход: Учебное пособие. – М.: Дело, 2005 г.
7. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов. /Под редакцией Кремера Н.Ш. – М.: ЮНИТИ, 2001 г.
8. Просветов Г.И. Математические методы в экономике: Учебное пособие. – М.: Изд-во РДЛ, 2004 г.
9. Саати Г. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1993 г.
10. Экономико – математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для вузов. /Под редакцией Федосеева В.В. – М.: ЮНИТИ, 2002 г.
11. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении: Учебное пособие. – М.: Дело, 2002 г.
12. Шапкин А.С., Мазаева М.П. Математические методы и модели исследования операций: Учебник. – М.: Издательская торговая корпорация “Дашков и К^{о}”. 2004 г.
13. Юкаева Н.А. Численные методы решения задач оптимизации: Учебное пособие. – Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 1996 г.

Содержание